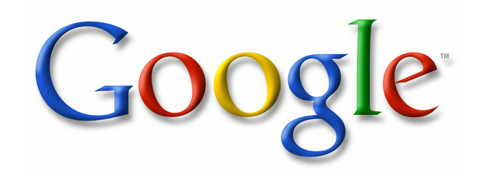
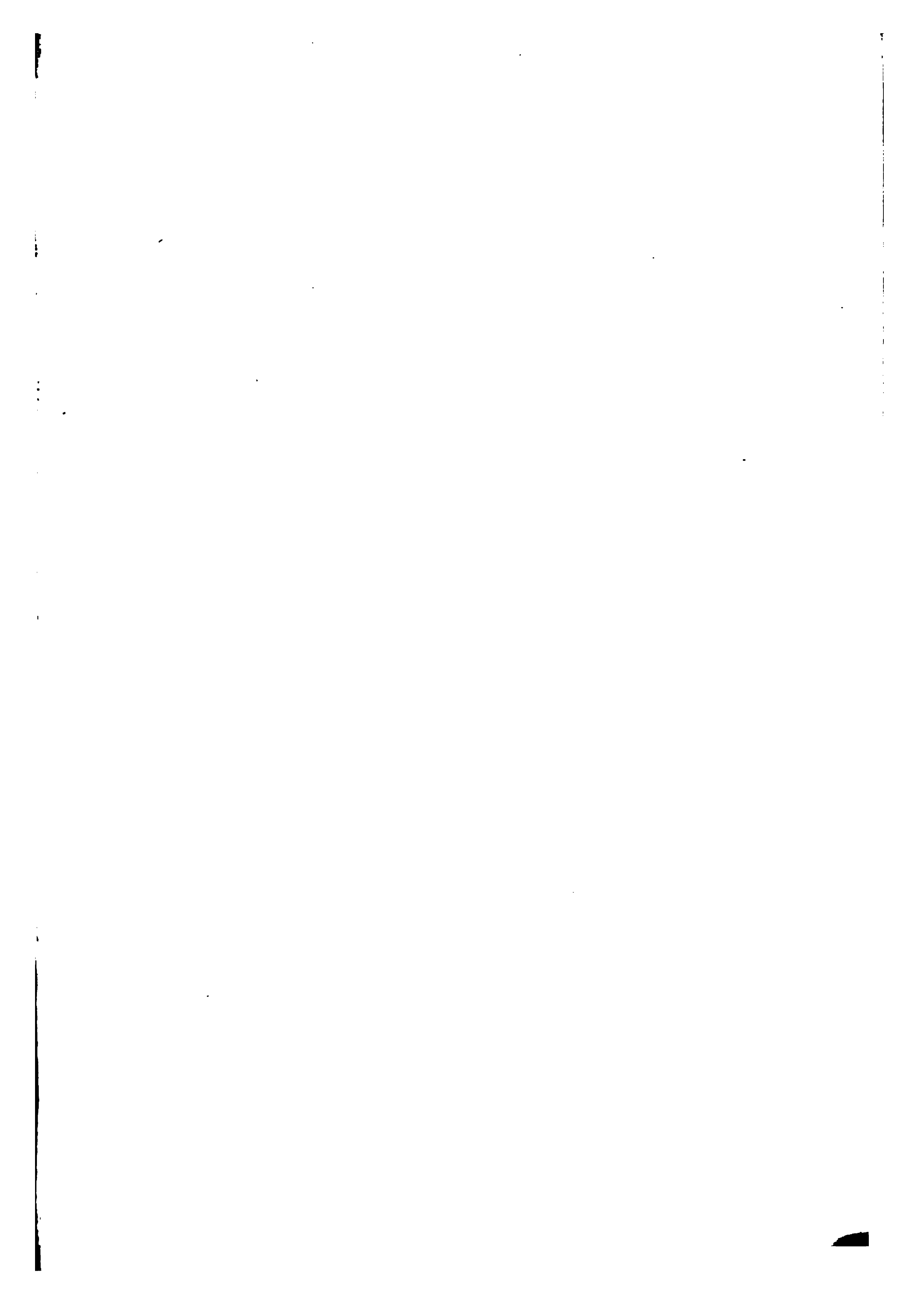



HARVARDIANAE
ACADEMIAE
SIGILLUM
IN NOV ANG
CHRISTO
ET
ECCLESIAE
VE
RI
TAS



Kleyers



Encyklopädie

der gesamten

mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Lehrbuch

der

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1890, Nov. 11 – 1891, Apr. 6.
Haven fund.

Lehrbuch

der

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren.

Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Dr. K. J. Bobek.

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1891.

Hofbuchdruckerei Carl Liebich, Stuttgart.

Vorwort.

Es war zur Zeit, als der arg vernachlässigte Baum der exakten Wissenschaften in allen seinen Teilen, besonders der mathematische Zweig desselben, sich einer neuen, aufmerksamen Pflege zu erfreuen begann, als demselben ein neues Reis — die Wahrscheinlichkeitsrechnung — von Pascal und Fermat aufgepfropft wurde. Durch die Pflege der Mathematiker Bernoulli entwickete sich dasselbe bald zu einem sehr fruchtbaren Zweig der Mathematik, welcher von vielen bedeutenden Mathematikern — es seien Laplace, Poisson, Gauss erwähnt — gepflegt, bereichert und mit anderen Gebieten des Wissens verbunden wurde. Die modernen Statistiker fanden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Grundlagen ihrer Wissenschaft. Aber auch das ganze Versicherungswesen, das in jüngster Zeit so sehr in den Vordergrund tritt, muss seinen Ausgangspunkt von der Wahrscheinlichkeitsrechnung nehmen, wenn es auf wissenschaftlicher Grundlage fussen will. Ja der hauptsächlichste Aufschwung desselben datiert von da ab, als die praktischen Versicherungstechniker die von der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik gelieferten theoretisch begründeten Grundlagen für die Praxis annahmen. Hiedurch wird auch der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein erhöhtes Interesse entgegengebracht und um ihr Studium zu erleichtern, und möglichst weiten Kreisen zugänglich zu machen, habe ich über Aufforderung der Verlagsbuchhandlung es übernommen, das nachfolgende Buch der Encyklopädie anzupassen.

Dasselbe hat den Zweck, den Leser in die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuführen. Es sind in demselben die wichtigsten Lehrsätze dieser Theorie bewiesen und durch gelöste und ungelöste Aufgaben ihre Anwendung auf die verschiedensten theoretischen und praktischen Gebiete gezeigt. Ausgelassen wurden sämtliche auf die Fehlertheorie und Lebenswahrscheinlichkeit bezughabende Sätze und Aufgaben, da sowohl die Fehlertheorie als die Lebenswahrscheinlichkeiten in besonderen Büchern behandelt werden sollen.

Soweit es möglich war, wurde von der Anwendung der Differental- und Integralrechnung Umgang genommen, um das Buch einem weiteren Kreise von Lesern zugänglich zu machen. Die Teile übrigens, in denen die höhere Analysis Anwendung fand, hängen mit den meisten übrigen Teilen nur lose zusammen, und können die letzteren auch ohne die ersteren verstanden werden. So kann im I. und II. Teile alles weggelassen werden, was auf Grund der höheren Analysis bewiesen oder berechnet wurde. Nicht so leicht geht es aber mit dem III. Teile, der übrigens seiner ganzen Natur nach mehr theoretisches Interesse darbietet, und für den Leser, der dieses verfolgt, wird die Infinitesimalrechnung unentbehrlich.

Als Schluss sind Aufgaben über Zeugenaussagen angefügt, die wohl von Interesse sein dürften und auf so einfacher Grundlage beruhen, dass sie jedermann verständlich sind.

Im Anhang sind, die Berechnung des Laplace'schen Integrals, der Beweis der Stirling'schen Formel, sowie die Tabellen für $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ und $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, beigegeben. Die letztere Tabelle ist den Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. A. Mayer entnommen.

Prossnitz, am 10. April 1890.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

II. Teil.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei wiederholten Versuchen. Das Bernoullische Theorem. Die math. Erwartung, Wetten, Versicherungen.

III. Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Anhang I.

Tabelle I.

Tabelle II.

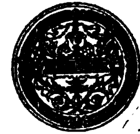
Anhang II.

772. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Erster Teil.
Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.
Seite 1—16. — Mit 2 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Seite 1—16. — Mit 2 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1890.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst Angabe und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile der reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten**. Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militä**-- etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessene mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Beruf zweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft** verleihen u somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** gebe

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Au gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Name verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasse Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird deren Erledigu thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

I. Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

A. Über die mathematische Wahrscheinlichkeit.

Frage 1. Was versteht man unter Wahrscheinlichkeit im allgemeinen und was unter mathematischer Wahrscheinlichkeit?

Antwort. Der Begriff, den man im Sprachgebrauche mit dem Worte »Wahrscheinlichkeit« verbindet, ist ein sehr unbestimmter. Man sagt das Eintreffen eines Ereignisses ist unmöglich, unwahrscheinlich, wahrscheinlich, sehr wahrscheinlich, gewiss, je nachdem man geringere oder grössere Zuversicht in dieses Eintreffen setzt. Man ist im allgemeinen geneigt, das Eintreffen eines Ereignisses für desto wahrscheinlicher zu erklären, je mehr günstige Umstände für dasselbe uns bekannt sind. Anders verhält es sich mit der mathematischen Definition der Wahrscheinlichkeit, diese darf nichts unbestimmtes enthalten, wenn sie zur Grundlage der Rechnung gemacht werden soll. Es gilt folgende Definition:

Unter mathematischer Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses versteht man das Verhältnis der Anzahl der Fälle, die dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, zu der Anzahl der Fälle, die überhaupt möglich sind.

Hiebei müssen die Möglichkeiten gleich vorausgesetzt werden, so dass nicht irgend eine vor der anderen bevorzugt ist.

So kann aus einer Urne, die eine weisse und zwei schwarze Kugeln enthält, mit

Erkl. 1. In der gegebenen Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist das „Eintreffen“ in grösster Allgemeinheit zu verstehen, so dass ein „Nichteintreffen“ ebenfalls darunter begriffen ist, als das „Eintreffen“ des „Nichteintreffens“.

Erkl. 2. Soll also die Wahrscheinlichkeit es Eintreffens eines Ereignisses bestimmt wern, so muss man die günstigen sowohl als auch e möglichen Fälle alle abzählen, um die ahrscheinlichkeit berechnen zu können. Gegen eses Gesetz wird häufig gesündigt und dadurch erden falsche Schlüsse herbeigeführt.

gleicher Möglichkeit irgend eine der drei Kugeln gezogen werden. Man hat also 3 Möglichkeiten für den Zug einer Kugel aus der Urne. Will man aber eine weisse Kugel ziehen, so ist für dieses Ereignis nur eine Möglichkeit vorhanden, da die Urne nur eine weisse Kugel enthält. Daher ist nach der obigen Definition die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel gleich $\frac{1}{3}$.

Für das Ziehen einer schwarzen Kugel aus derselben Urne ergeben sich zwei Möglichkeiten, da eine der beiden schwarzen Kugeln gezogen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist daher $\frac{2}{3}$.

Erkl. 3. Aus der gegebenen Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit ersieht man, dass die mathematische Wahrscheinlichkeit desto grösser wird, je mehr günstige Fälle, bei gleicher Anzahl möglicher Fälle, für das Eintreten des Ereignisses vorhanden sind, dass also diese Definition dem gebräuchlichen Begriff der Wahrscheinlichkeit angepasst ist.

Anmerkung 1. Nach der Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit wird sich dieselbe Wahrscheinlichkeit ergeben, für das Ziehen einer weissen Kugel aus einer Urne U_1, die 1 weisse und 2 schwarze Kugeln enthält, als für eine Urne U_2, die 2 weisse und 4 schwarze Kugeln enthält, denn dieselbe ist für U_1 gleich $\frac{1}{3}$ und für U_2 ergibt sie sich gleich $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Man kann sich diesen Umstand folgendermassen erklären. In der Urne U_2 denke man sich die 2 weissen Kugeln durch einen Faden verbunden und ebenso verbinde die 4 schwarzen Kugeln zu zwei Paaren. Dann hat man offenbar in U_2 1 Paar weisse und 2 Paare schwarzer Kugeln. Macht man nun aus der Urne einen Zug, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür das weisse Paar zu ziehen $\frac{1}{3}$. Da aber das weisse Paar dann nun nur dann gezogen wird, wenn eine weisse Kugel ergriffen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür bei einem Zuge aus U_2 eine weisse Kugel zu ergreifen $\frac{1}{3}$. Denkt man sich noch, dass der Faden, mit dem die Kugeln zusammengebunden sind, bei dem Ziehen der ergriffenen Kugel reisst, so ist klar, dass die Wahrscheinlichkeit aus U_2 eine weisse Kugel zu ziehen, ebenso gross ist, wie die eine weisse Kugel aus U_1 zu ziehen. (Vergl. Laplace, Theorie analytique des probabilités.)

Anmerkung 2. Die soeben definierte mathematische Wahrscheinlichkeit, die wir in der Folge auch blos Wahrscheinlichkeit nennen werden, da wir es in diesem Buche nur mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit zu thun haben werden, wird auch als direkte, einfache Wahrscheinlichkeit bezeichnet im Gegensatze zu entgegengesetzten und zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit nämlich, welche sich für das Nichteintreffen des Ereignisses ergibt, heisst entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Hängt ein Ereignis E von dem Eintreffen zweier oder mehrerer Ereignisse ab, so sagt man, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E ist zusammengesetzt aus den Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der anderen Ereignisse und nennt sie zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Schliesslich unterscheidet man noch die relative Wahrscheinlichkeit von der absoluten Wahrscheinlichkeit. Wird nämlich das Eintreffen mehrerer Ereignisse mit einander verglichen, und frägt man nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis eher eintritt, als irgend ein anderes, so heisst diese Wahrscheinlichkeit relative Wahrscheinlichkeit und im Gegensatze hiezu die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis überhaupt eintritt, absolute Wahrscheinlichkeit.

B. Über die direkte und entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Frage 2. Welches ist die Formel für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E, das unter m möglichen Fällen, g günstige Fälle für sein Eintreffen besitzt?

Antwort. Nach der Definition der Wahrscheinlichkeit wird, wenn w die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E ist, die

Formel 1: $$w = \frac{g}{m}$$

gelten.

Frage 3. Welches ist das Symbol der Gewissheit?

Antwort. Die Gewissheit des Eintreffens eines Ereignisses ist der höchste Grad der Wahrscheinlichkeit und tritt offenbar dann ein, wenn alle möglichen Fälle auch günstige Fälle sind. Hieraus folgt aus der Formel 1, nachdem $g = m$ ist, dass

$$w = 1$$

das Symbol der Gewissheit sein muss.

Umgekehrt finden wir, dass die Wahrscheinlichkeit

$$w = 1$$

ist, so folgt nach Formel 1

$$1 = \frac{g}{m}$$

also ist $g = m$, d. h. die möglichen Fälle sind auch alle günstige Fälle für das Eintreffen des Ereignisses, dieses tritt also gewiss ein.

Frage 4. Welche Relation besteht zwischen der direkten und entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses? (Vergl. Anmerkung 2.)

Antwort. Ist w die direkte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, w' die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit desselben Ereignisses, so ist die Relation zwischen beiden Wahrscheinlichkeiten die durch die

Formel 2: $$w + w' = 1$$

ausgedrückte Relation.

Beweis: Es seien für das Eintreffen des Ereignisses unter m gleich möglichen Fällen g günstig, dann ist nach Formel 1

die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses

$$w = \frac{g}{m}$$

Denken wir uns nun eine Urne, in der g weisse und $(m-g)$ schwarze Kugeln, also im ganzen m Kugeln vorhanden sind. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel aus der Urne auch

$$w = \frac{g}{m}$$

denn unter den möglichen Zügen, die sich auf die m-Kugeln erstrecken, sind nur g dem Ziehen einer weissen Kugel günstig.

Wir können daher die Wahrscheinlichkeiten für Eintreffen und Nichteintreffen des Ereignisses identificieren mit den Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weissen resp. einer schwarzen Kugel aus der gedachten Urne.

Nun ist, wenn eine Kugel gezogen wird, dieselbe entweder weiss oder schwarz. Das Ziehen einer schwarzen Kugel ist also das entgegengesetzte Ereignis des Ziehens einer weissen Kugel. Da nun in der Urne $(m-g)$ schwarze Kugeln sind, so ist nach Formel 1 die Wahrscheinlichkeit w' für das Ziehen einer schwarzen Kugel aus der Urne

$$w' = \frac{m-g}{m}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit w' ist aber die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit zu w und es folgt

$$w + w' = \frac{g}{m} + \frac{m-g}{m} = 1$$

ev. z. B. w.

Note: Man ersieht deutlich im Beweise, wie das Nichteintreffen eines Ereignisses als das Eintreffen des Nichteintreffens aufgefasst wird. (Vergl. Erkl. 1.)

Gelöste Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit.

(Vergleiche Formel 1.)

Aufgabe 1. Welches ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Spiele von 32 Karten eine Coeur zu ziehen?

Erkl. 3. Ein Spiel von 32 Karten enthält 4 „Farben" und zwar: Coeur, Pique, Treffe, Carreau, von jeder Farbe sind 8 Karten vorhanden und zwar: Ass, König, Dame, Bube, Zehn, Neun, Acht und Sieben. Die ersten 4 heissen Figuren.

Auflösung. Da man irgend eine der 32 Karten ziehen kann, so ist die Anzahl aller möglichen Fälle 32. Für das Ziehen einer Coeur sind aber nur 8 Fälle günstig, da nur 8 Coeur im Spiele vorhanden sind, daher ist die Wahrscheinlichkeit

$$w_1 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

nach Formel 1.

Aufgabe 2. Welches ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Spiele von 32 Karten eine Dame zu ziehen?

Auflösung. Da man irgend eine der 32 Karten ziehen kann, so ist die Anzahl aller möglichen Fälle 32. Die Anzahl günstiger Fälle ist 4, da im Spiele nur 4 Damen existieren. Nach Formel 1 ist also die Wahrscheinlichkeit

$$w_2 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Aufgabe 3. Welches ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel die „5" zu werfen?

Erkl. 4. Unter einem Würfel wollen wir stets einen solchen Würfel verstehen, dessen Seitenflächen mit den sechs Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind. Derselbe wird ferner aus einem vollständig homogenen Material bestehend angesehen, so dass sein Schwerpunkt (siehe Klimperts Lehrb. der Physik) zugleich der Mittelpunkt des vollständigen regulären Körpers ist (siehe Kleyers Lehrb. der Körperberechnungen). Denn würde der Schwerpunkt einer Seitenfläche näher als allen anderen liegen, so würde ein Grund vorhanden sein, dass der Würfel auf diese Seitenfläche fällt, also wäre das Fallen auf die sechs Seitenflächen nicht gleich möglich; währenddem wir voraussetzen müssen, dass alle möglichen Fälle gleich möglich sind.

Auflösung. Da der Würfel sechs Seitenflächen hat und jede derselben bei einem Wurf oben aufliegen kann, so sind 6 Fälle möglich. Günstig ist nur der einzige Fall, in welchem die mit 5 bezeichnete Seitenfläche oben aufliegt. Nach Formel 1 ist also die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{1}{6}.$$

Aufgabe 4. Welches ist die Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln „3" und „5" zu werfen?

Auflösung. Bezeichnen wir die beiden Würfel mit A und B, so können offenbar

folgende Möglichkeiten eintreten. Es wird geworfen

mit A die Ziffer: 1
„ B eine der Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6
„ A die Ziffer: 2
„ B eine der Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6
„ A die Ziffer: 3
„ B eine der Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6
„ A die Ziffer: 4
„ B eine der Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6
„ A die Ziffer: 5
„ B eine der Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6
„ A die Ziffer: 6
„ B eine der Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Das sind also 36 Fälle.

Günstig sind nur die beiden Fälle, dass A die Ziffer 3 und B die Ziffer 5, oder dass A die Ziffer 5 und B die Ziffer 3 zeigt. Also ist nach Formel 1 die Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Aufgabe 5. Welches ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen?

Erkl. 5. Unter Pasch versteht man den Wurf, bei welchem beide Würfel gleiche Ziffern zeigen.

Auflösung. Die Anzahl möglicher Fälle wird, wie in Aufgabe 4, wieder 36 sein. Die Anzahl günstiger Fälle ist aber 6, denn ein Pasch tritt auf, wenn der Würfel A und B gleichzeitig zeigen entweder: 1 oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 6.

Nach Formel 1 wird also die Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Aufgabe 6. Welches ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln die Summe 7 zu werfen?

Auflösung. Die Anzahl möglicher Fälle ist, wie in Aufgabe 4, wieder 36. Damit die Summe der beiden Ziffern, welche man mit den zwei Würfeln wirft, 7 ist, kann der Würfel

A zeigen 1, 2, 3, 4, 5, 6
B muss dann 6, 5, 4, 3, 2, 1

zeigen, denn es ist

$$7 = 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1.$$

Die Anzahl günstiger Fälle ist mithin 6 und die Wahrscheinlichkeit nach Formel 1 also:

$$w = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Anmerkung 3. Ist die Summe, die geworfen werden soll, gerade, etwa 4, so muss der Wurf 2,2 einfach gezählt werden.

Aufgabe 7. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Terno in einer Lotterieziehung erscheint?

Erkl. 6. Die Ziehung in einer Lotterie geschieht in der Weise, dass Zettel, welche die Nummern von 1 bis 90 tragen, in Kapseln von genau gleicher Grösse und Farbe gegeben werden. Diese 90 Kapseln werden in eine Trommel geworfen, die öfters um eine Axe gedreht wird, wodurch die Kapseln unter einander gemischt werden. In dem Mantel der Trommel ist eine verschliessbare Klappe angebracht, die zum Zwecke des Ziehens geöffnet wird. Die Ziehung geschieht in Österreich (wo das Lotto noch allein besteht) durch einen Waisenknaben, der einen Anzug ohne Taschen und Ärmel hat. Derselbe zieht nacheinander 5 Kapseln, die den beiwohnenden Kommissären übergeben werden, welche die Nummer ausrufen und notieren. Die zuerst gezogene Nummer heisst „im ersten Ruf" gezogen, die dann gezogene „im zweiten Ruf" u. s. w. Eine aus den gezogenen Nummern heisst Solo, irgend zwei derselben zusammengenommen heissen ein Ambo, drei ein Terno, vier ein Quaterno, alle fünf nennt man Quinterno.

Erkl. 7. In der Kombinationslehre (siehe das Lehrbuch der Kleyerschen Encyklopädie über die Kombinationslehre) wird gezeigt, dass die Anzahl Kombinationen ohne Wiederholung von n-Elementen zur k^{ten} Klasse durch die Formel a:

Formel a: $${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots k}$$

gegeben ist.

Unter Kombination ohne Wiederholung der n-Elemente zu k versteht man die Anordnung derselben in Gruppen von k-Elementen, so dass in jeder Gruppe nur verschiedene Elemente vorkommen, und dabei es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge diese Elemente stehen.

Beispiel:

Die Kombinationen zu zweien der 4 Elemente a, b, c, d sind: ab, ac, ad, bc, bd, also 6 an Zahl, was auch aus Formel a für $n = 4$ und $k = 2$ folgt:

$${}_4C_2 = \binom{4}{2} = \frac{4.3}{1.2} = 6.$$

Die Kombinationen der dritten Klasse sind: abc, abd, acd, bcd, also 4, wie es auch die Formel a liefert

$${}_4C_3 = \binom{4}{3} = \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4.$$

Die Kombinationen der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten Klasse nennt man auch Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen.

Man bezeichnet gewöhnlich das Produkt der aufeinander folgenden Zahlen von 1 bis k mit $k!$ und liesst k-Faktorielle, so dass also

Formel b: $$k! = 1.2.3\ldots.k$$

Auflösung. Die Anzahl möglicher Fälle ist gleich der Anzahl Ternen, die man aus den **90** Nummern bilden kann. Denn irgend eine von diesen muss die gegebene sein. Diese Anzahl ist aber

$$\frac{90.89.88}{1.2.3} = 117840.$$

Die Anzahl günstiger Fälle wird die Anzahl der Ternen sein, die man aus den fünf gezogenen Nummern bilden kann, also:

$$\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10.$$

Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach Formel **1**:

$$w = \frac{10}{117840} = \frac{1}{11784}.$$

ist. Multipliziert man Zähler und Nenner der Formel 2 mit

$$(n-k)\,(n-k-1)\ldots.3.2.1=(n-k)!,$$

so nimmt dieselbe die Gestalt an

Formel a': $${}_nC_k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

und da

$${}_nC_{n-k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\;k!}$$

nach derselben Formel a' wird, wenn darin statt k gesetzt wird $n-k$, so folgt

$${}_nC_k={}_nC_{n-k}$$

d. h. die Anzahl Kombinationen ohne Wiederholung von n-Elementen zur Klasse k ist dieselbe, wie die zur Klasse $n-k$.

Da offenbar die n-Elemente nur eine Gruppe zu n geben, so ist ${}_nC_n=\binom{n}{n}=1$, daher ist auch ${}_nC_0=\binom{n}{0}=1$.

Aufgabe 8. Auf einer Bank sind 4 Sitze mit Nummern versehen. Es setzen sich vier Personen A, B, C, D auf dieselbe, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A auf den Sitz Nr. 1 kommt?

Erkl. 8. Die verschiedenen Anordnungen von beliebigen Elementen nennt man Permutationen. Die Anzahl Permutationen von n-Elementen ist

Formel c: $P_n=1.2.3\ldots.n=n!$

wie in der Kombinationslehre gezeigt wird. (Siche das Lehrbuch der Kombinationslehre in der Kleyerschen Encyklopädie.)

Mit Hilfe der Formel c löst sich die Aufgabe 8 folgendermassen: Die Anzahl möglicher Fälle ist offenbar $4!=1.2.3.4=24$. Die günstigen Fälle sind die, in welchen A den Platz Nr. 1 einnimmt und die 3 übrigen Personen in irgend welcher Weise die 3 Plätze 2, 3, 4 besetzen, was auf $3!=1.2.3=6$ Arten geschehen kann. Also ist nach Formel 1:

$$w=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.$$

Auflösung. Die Anordnungen, in welchen die Personen die Plätze einnehmen können, sind offenbar folgende:

Platz Nr.	1	2	3	4
wird eingenommen von	A	B	C	D
oder	A	B	D	C
	A	C	B	D
	A	C	D	B
	A	D	C	B
	A	D	B	C
	B	C	A	D
	B	C	D	A
	B	A	C	D
	B	A	D	C
	B	D	A	C
	B	D	C	A
	C	A	B	D
	C	A	D	B
	C	B	A	D
	C	B	D	A
	C	D	A	B
	C	D	B	A
	D	A	B	C
	D	A	C	B
	D	B	A	C
	D	B	C	A
	D	C	A	B
	D	C	B	A

Also ist 24 die Anzahl Möglichkeiten, in denen die 4 Personen die 4 Plätze besetzen können. Von diesen sind nur die 6 ersten günstig, in denen A den Platz Nr. 1 ein-

nimmt. Nach Formel 1 ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 9. Welches ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln eine Summe über 4 zu werfen?

Auflösung. Da die Summe, welche mit zwei Würfeln geworfen werden kann, höchstens 12 ist, so hätte man nach Aufgabe 6 die Fälle abzuzählen, in denen man eine Summe 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 wirft, die alle günstige Fälle wären. Die Anzahl möglicher Fälle ist nach Aufgabe 4 dann gleich 36. Kürzer verfährt man, wenn man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit w' berechnet, d. h. die Wahrscheinlichkeit eine Summe zu werfen, die nicht über 4 geht, also kleiner als 5 ist. Man hat hiezu die Fälle abzuzählen, in denen die Summe 2, 3, 4 ist, da die Summe 1 nicht auftreten kann. Es ergeben sich nun für das Werfen

der Summe $2 = 1 + 1$ . . . . 1 Fall
„ „ $3 = 1 + 2 = 2 + 1$ . . . . . . 2 Fälle
„ „ $4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2$. 3 „

im Ganzen also 6 Fälle, in denen die Summe der geworfenen Ziffern unter 5 ist. Da die Anzahl möglicher Fälle 36 ist, so ist nach Formel 1:

$$w' = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

und daher nach Formel 2 die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{5}{6}.$$

Aufgabe 10. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln eine Summe über 11 zu werfen?

Auflösung. Auch hier müsste man eigentlich die Anzahl günstiger Fälle und die Anzahl aller möglichen Fälle, deren $6 . 6 . 6 = 216$ sind, abzählen, um nach Formel 1 die Wahrscheinlichkeit w zu finden. Zur Übung sei dieses Verfahren angeraten. Wir wollen anders verfahren. Die drei Würfel denken wir uns mit den Ziffern so beschrieben, dass einander gegenüberliegende Seitenflächen die Summe 7 ergeben; dass also 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4 einander gegenüberliegen. Diese Voraussetzung ist zulässig, da sie an der Wahrscheinlichkeit w nichts ändern kann. Denken wir uns nun einen Wurf vollführt und dieser lieferte eine Summe über 11, dann ist die Summe der Ziffern der unten liegenden Seitenflächen unter 11. Denn die 3 Paar Seitenflächen der drei Würfel, die oben und unten liegen, liefern

immer die Summe $3 \cdot 7 = 21$. Ist also die Summe auf den oberen über 11, so ist die Summe auf den unteren unter 11. Umgekehrt, ist die Summe auf der oberen Seitenfläche unter 11, so ist die Summe auf den unteren über 11. Es sind also genau so viel Fälle günstig für das Werfen einer Summe über 11 als für das Werfen einer Summe unter 11. Ist also w' die Wahrscheinkeit für das Werfen einer Summe unter 11, d. h. die der gesuchten Wahrscheinlichkeit w entgegengesetzte Wahrscheinlichheit, so ist $w = w'$ und da nach Formel 2

$$w + w' = 1$$

ist, so folgt

$$w = \frac{1}{2} = w'.$$

Aufgabe 11. Eine Lotterie enthält 1000 Lose, von denen 10 gezogen werden. Man besitzt 50 der Lose, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass eines der 50 Lose gezogen wird?

Auflösung. Ist w die Wahrscheinlichkeit, dass eines der 50 Lose gezogen wird, so bezeichnen wir mit w' die Wahrscheinlichkeit, dass keines der 50 Lose gezogen wird. Es ist dann nach Formel 2:

$$w + w' = 1$$

und es lässt sich w' einfach berechnen.

Die Anzahl möglicher Fälle m ist gleich der Zahl, welche anzeigt, wie oft die 1000 Lose in Gruppen zu 10 angeordnet werden, d. h. es ist m nach der Formel a:

$$m = \binom{1000}{10} = \frac{1000 \cdot 999 \ldots 991}{1 \cdot 2 \ldots 10}$$

Die Anzahl günstiger Fälle g' für das Nichtziehen eines der 50 Lose ist dann die Anzahl-Kombination zu 10 der 950 übrigen Lose, also

$$g' = \binom{950}{10} = \frac{950 \cdot 949 \ldots 941}{1 \cdot 2 \ldots 10}$$

also ist

$$w = \frac{950 \cdot 949 \cdot 948 \cdot 947 \cdot 946 \cdot 945 \cdot 944 \cdot 943 \cdot 942 \cdot 941}{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996 \cdot 995 \cdot 994 \cdot 993 \cdot 992 \cdot 991}$$

Wir berechnen w' mittels Logaritmen und erhalten

den Logaritmus des Zählers $= 29{,}7565952$
„ „ „ Nenners $= 29{,}9803946$
daher $\log w' = 0{,}7762006 - 1$
also $w' = 0{,}5973$

woraus die gesuchte Wahrscheinlichkeit w ergibt

$$w = 1 - w' = 0{,}4027.$$

Aufgabe 12. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für den Aufnehmer im Tarokspiel einen König zu kaufen, wenn er noch keinen besitzt?

Erkl. 9. Das Tarokspiel zählt 54 Karten und zwar 22 Taroks, Karten, die mit Nummern von 1 bis 22 bezeichnet sind, von denen die 1 „Pagat“, die 21 „Mond“ und die 22 „Skis“ heisst. Ferner sind vier Farben: Coeur, Careau, Treffe und Pique, von denen jede 4 Figuren und 4 Scartins enthält. Die Figuren sind: König, Dame, Caval, Bube. Pagat, Mond und Skis heissen Troulle (tous le trois), zwei derselben werden als Köpfe bezeichnet. Die Könige sowie Pagat, Mond, Skis heissen Honeurs. Nachdem 2mal 3 Karten als „Talon“ auf den Tisch gelegt wurden, werden die übrigen 48 Karten unter die drei Spieler verteilt, deren also jeder 16 bekommt. Ist dies geschehen, so wird der Talon gekauft: indem einer der Spieler das Spiel aufnimmt und gegen die beiden andern spielt, wobei er das Recht hat, eine der 2 Gruppen von drei Karten des Talons zu seinen Karten hinzuzunehmen und 3 andere dafür herauszulegen.

Auflösung. Wir bezeichnen die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit w, die entgegengesetzte mit w', und suchen w' die Wahrscheinlichkeit, dass im Talon kein König ist. Da der Aufnehmer 16 Karten hat, in denen kein König ist, so müssen die 4 Könige in den 38 übrigen Karten sein und von diesen sind also 34 keine Könige. Nun besteht der Talon aus 6 Karten also ist die Anzahl m möglicher Fälle für die Anordnung der übrigen 38 Karten in Talons gleich der Anzahl Kombinationen der 38 Karten zur sechsten Klasse also

$$m = \frac{38.37.36.35.34.33}{1.2.3.4.5.6}$$

Die Anzahl g' der günstigen Fälle ist offenbar die Anzahl Talons, die keinen König enthalten, und die sich als die Anzahl Kombinationen zur sechsten Klasse der 34 Karten ergeben, die keine Könige sind. Es ist also

$$g' = \frac{34.33.32.31.30.29}{1.2.3.4.5.6}$$

Daher ist

$$w' = \frac{g'}{m} = \frac{34.33.32.31.30.29}{38.37.36.35.34.33}$$
$$= \frac{7192}{14763}$$
$$= 0{,}48716$$

und mithin die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{7571}{14763}$$
$$= 0{,}51284$$

Wollte man w direkt berechnen, so wäre die Arbeit eine viel grössere, denn man müsste die Fälle betrachten, in denen im Talon 1, 2, 3 oder 4 Könige liegen, die alle günstige Fälle geben.

Aufgabe 13. Welches ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine gerade Zahl zu werfen?

Auflösung. Da der Würfel nur 3 gerade Zahlen besitzt: die „2“, „4“ und „6“, so ist, da 6 Fälle möglich sind, in dem Aufwerfen der 6 Seiten

$$w = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 14. Von 90 Nummern einer Lotterie werden 3 gezogen, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe derselben unter 101 ist?

Auflösung. Die Anzahl möglicher Fälle ist offenbar die Anzahl Kombinationen der 90 Ziffern zur dritten Klasse, also ist:

$$m = \binom{90}{3} = \frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480 \quad \ldots \quad (1)$$

Es seien nun a, b, c irgend drei der Zahlen, welche der Bedingung

$$a + b + c \leqq 100 \ldots\ldots\ldots (2)$$

genügen, und wir setzen

$$a > b > c$$

voraus. Dann sind alle Kombinationen der dritten Klasse, deren Zahlen solche a, b, c sind, günstige Fälle, deren Zahl abzuzählen ist.

Wir setzen

$$\begin{array}{lll} c = z & \text{mit der Bedingung} & z > o \\ b = y + z & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & y > o \ldots (3) \\ a = x + y + z & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & x > o \end{array}$$

Dann muss

$$z < 32 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

sein. Denn wäre

$$z = c \geqq 33$$

so würde $y + z = b \geqq 34$

und $x + y + z = a \geqq 35$

sein müssen, also wäre

$$a + b + c \geqq 102$$

Aus der Bedingung (2) und den Gleichungen (3) folgt nun, dass

$$x + 2\,y + 3\,z \geqq 100 \ldots\ldots\ldots (5)$$

sein muss, wobei

$$\begin{array}{l} o < z \leqq 32 \\ o < y \leqq 90 - z \ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\ o < x \leqq 90 - z - y \end{array}$$

sein muss, sobald z einmal gewählt ist, da weder a noch b über 90 sein können. Wir geben nun dem z einen bestimmten Wert und suchen die Anzahl Kombinationen von x und y, welche den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} x + 2\,y \leqq 100 - 3\,z \\ x + y \leqq 90 - z \\ x > o \\ y > o \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (7)$$

gleichzeitig genügen. Jedes Paar x, y, welches den Bedingungen (7) genügt, gibt dann mit z zusammen ein System a, b, c, welches der Bedingung (2) genügt.

Wir betrachten x und y als Cartesische Koordinaten in der Ebene, dann stellen die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} x + 2\,y = 100 - 3\,z \\ x + y = 90 - z \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

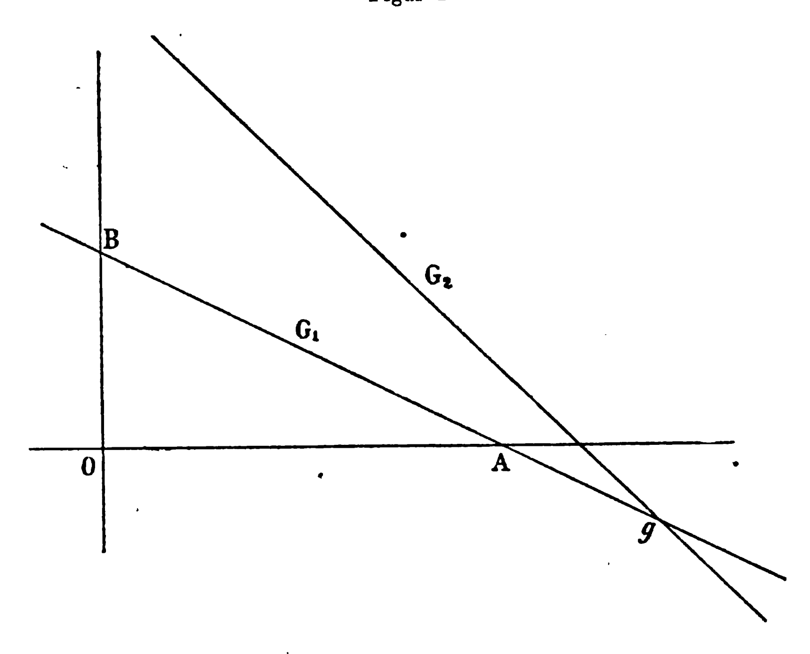
zwei Gerade G_1 und G_2 dar, welche sich in dem Punkte g, dessen Koordinaten ξ und η sind, scheiden (vgl. das Lehrbuch über analy-

tische Geometrie der Kleyerschen Encyklopädie). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi &= 80 + z \\ \eta &= 10 - 2z \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Die Bedingungen (7) stellen nun alle Punkte dar, welche in dem ersten Quadranten des Koordinatensystems (in welchem x und y positiv sind) innerhalb der Figur liegen, die von den Geraden G_1 und G_2 und den Koordinatenaxen begrenzt werden. Die Punkte, deren Abscissen

Figur 1.



und Ordinaten ganze Zahlen sind, stellen dann immer Kombinationen von x und y dar, die unserem Problem günstig sind, resp. zu Werten a, b, c führen, welche der Bedingung (2) entsprechen. Die Anzahl dieser Punkte haben wir also zu suchen.

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle $z \geqq 5$ und $z < 5$.

a) $z \geqq 5$. Dann liegt der Schnittpunkt g der Geraden G_1 und G_2, Figur 1, entweder unter der x-Achse oder auf ihr aber nicht über derselben, da nach Gleichung (9) sich η negativ oder gleich Null ergibt.

In diesem Falle ist für alle Punkte, für welche

$$\begin{aligned} x + 2y &\leqq 100 - 3z \\ x &> o \\ y &> o \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10$$

ist, auch stets

$$x + y \leqq 90 - z$$

wie aus der Figur 1 ersichtlich, indem alle Punkte, welche den Bedingungen (10) genügen innerhalb des Dreieckes $o\,A\,B$ liegen. Es kommt darauf an, die Punkte abzuzählen, deren x und y ganze Zahlen sind.

Um übersichtlich zu verfahren, setzen wir vorerst z gerade voraus, also

α) $z = 2\zeta$. Dann scheidet G_1 die Koordinatenaxen in den Punkten A und B, so dass nach Gleichung (8)

$x = o\,A = 100 - 6\,\xi$, da $y = o$ ist, und
$y = o\,B = 50 - 3\,\xi$, „ $x = o$ ist.

Wir markieren nun auf $o\,B$ die Punkte in den Abständen von o:

$$y = 1, 2, 3 \ldots\ldots 49 - 3\,\zeta$$

und auf $o\,A$ von o aus die Punkte mit den Abständen

$$x = 1, 2, 3 \ldots\ldots 99 - 6\,\xi$$

Durch die Punkte auf $o\,B$ ziehen wir parallele Gerade zu $o\,A$ und durch die auf $o\,A$ parallele Gerade zu $o\,B$. Wir erhalten durch die Schnittpunkte dieser Geraden die Punkte, deren Koordinaten x und y ganze Zahlen sind. Wir bezeichnen mit $S_{2\zeta}$ die Anzahl dieser Punkte, die innerhalb des Dreieckes $o\,A\,B$ liegen mit Ausschluss der Seiten $o\,A$ und $o\,B$.

Nun liegen auf den Geraden, die parallel zu $o\,A$ gehen im Abstande:

1,	2,	3	$49 - 3\,\xi$
$98 - 6\,\zeta$	$96 - 6\,\zeta$	$94 - 6\,\zeta$	2

der eben erwähnten Punkte, wie aus der Gleichung (8) der Geraden G_1 für x folgt, wenn man y der Reihe nach 1, 2, 3 ... setzt. Es ist mithin

$$\begin{aligned} S_{2\zeta} &= 2 + 4 + 6 + \ldots + 96 - 6\,\zeta + 98 - 6\,\zeta \\ &= 2\,[1 + 2 + 3 + \ldots + 48 - 3\,\zeta + 49 - 3\,\zeta] \\ &= (49 - 3\,\zeta)\,(50 - 3\,\zeta) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11) \end{aligned}$$

Erkl. 10. Es ist

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}\,n\,(n + 1)$$

(vergl. Kleyers Lehrb. der arithmetischen und geometrischen Progressionen).

Setzen wir nun

β) $z = 2\,\zeta + 1$, so folgt aus Gleichung (8), dass

$x = o\,A = 97 - 6\,\zeta$, da $y = o$ ist, und
$y = o\,B = 49 - 3\,\zeta - \frac{1}{2}$, „ $x = o$ ist.

Zieht man wieder durch die Punkte in den Abständen 1, 2, 3 ... auf der Abscissen- und Ordinatenaxe Parallele zu den Axen, so hat man nur die Anzahl Schnittpunkte dieser Linien, die innerhalb des Dreieckes $o\,A\,B$, Figur 1, liegen, abzuzählen. Es liegen auf

den Geraden, die parallel zur Axe oA gehen im Abstande

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3\ .\ .\ 48-3\zeta \\ 95-6\zeta & 93-6 & 91-6\zeta\ .\ .\ .\ .\ 1 \text{ Punkte,} \end{matrix}$$

wie sich wieder aus Gleichung (8) ergibt.

Erkl. 11. Es ist

$$1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$$

(vergl. Kleyers Lehrb. der arithmetischen und geometrischen Progressionen).

Bezeichnet also $S_{2\zeta+1}$ die Anzahl der Schnittpunkte, so ist

$$\begin{aligned} S_{2\zeta+1} &= 1+3+5+\ldots\ldots+95-6\xi \\ &= (48-3\xi)^2 \ldots\ldots\ldots (12) \end{aligned}$$

als Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $95-6\zeta$.

Es ist mithin

$$\begin{aligned} S_2\zeta+S_2\xi+1 &= (49-3\zeta)(50-3\zeta)+(48-3\zeta)^2 \\ &= (49-3\zeta)(50-3\zeta)+(49-3\zeta)(47-3\zeta)+1\ \ldots (13 \\ &= (49-3\zeta)(97-6\zeta)+1 \end{aligned}$$

Bezeichnet nun A_1 die Anzahl der Fälle, welche sich für $z \geqq 5$ ergeben, so ist

$$A_1 = S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+\ldots+S_{31}+S_{32}$$

nachdem $z \leqq 32$ sein muss. Schreibt man A_1 in der Form

$$\begin{aligned} A_1 &= S_5+S_{32}+(S_6+S_7)+(S_8+S_9)+\ldots+(S_{30}+S_{31}) \\ &= S_5+S_{32}+\sum_{\zeta=3}^{\zeta=15}(S_{2\zeta}+S_{2\zeta+1}) \end{aligned}$$

so wird zufolge (11), (12) und (13)

$$A_1 = (42)^2+2+\sum_{\zeta-3}^{\zeta=15}[1+(49-3\zeta)(97-6\zeta)]$$

Erkl. 12. Die

$$\sum_1^n \lambda^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(Vergl. Kleyers Lehrb. der arithmetischen und geometrischen Progressionen).

In der Summe rechts führen wir statt des Summationsindex ζ einen anderen λ ein, indem wir

$$\lambda = \zeta - 2$$

setzen, wodurch die Summe über die Zahlen $\lambda = 1, 2 \ldots$ bis 13 zu erstrecken ist, indem dann ζ die Werte 3, 4 ... 15 durchläuft.

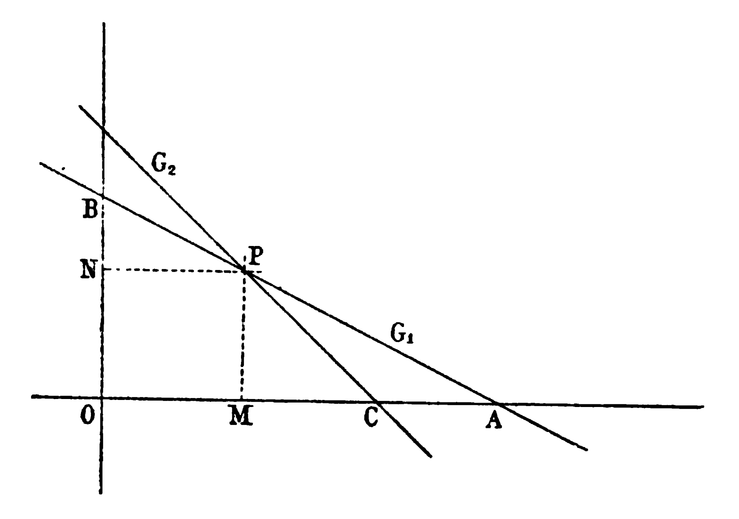
Es wird also

$$\begin{aligned} A_1 &= (42)^2+2+\sum_1^{13}[1+(43-3\lambda)(85-6\lambda)] \\ &= (42)^2+2+\sum_1^{13}[1+43.85-(3.85+6.43)\lambda+18\lambda^2] \\ &= (42)^2+2+\sum_1^{13}[3656-513\lambda+18\lambda^2] \\ &= (42)^2+2+13.3656-513\sum_1^{13}\lambda+18\sum_1^{13}\lambda^2 \\ &= (42)^2+2+13.3656-513.13.7+3.13.14.27 \\ &= 17353 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14) \end{aligned}$$

Wir setzen nun

b) $z < 5$ voraus, dann liegt der Schnittpunkt P der Geraden G_1 und G_2 zufolge der Gleichungen (9) über der x-Achse, wie in Figur 2, und die Gleichungen (8) sagen aus, dass man die Punkte zu betrachten hat, die innerhalb des Viereckes $BPCO$ liegen, wenn G_2 die x-Achse in C schneidet.

Figur 2.



Wir bezeichnen nun die Anzahl der Punkte, welche ganzzahlige Ordinaten enthalten und im Dreiecke NBP liegen, mit Ausschluss der Seiten NB und NP mit S_z. Die Anzahl solcher Punkte, die innerhalb des Dreieckes MPC liegen, mit Ausschluss der Seiten MP und MC mit S_z' und die Anzahl der Punkte die im Rechteck $NPMO$ liegen, mit Ausschluss der Seiten OM und ON mit S_z''.

S_z berechnet sich wie sub a), indem wir die Fälle $z = 2\zeta$ und $z = 2\zeta + 1$ unterscheiden.

α) $z = 2\zeta$ dann ist nach den Gleichungen (9):

$$NP = 80 + 2\zeta$$
$$ON = 10 - 4\zeta$$

und nach der ersten Gleichung (8) für $x =$ ›

$$y = OB = 50 - 3\zeta$$

Man hat also zwischen N und B, sow› zwischen N und P in den Abständen 1, , 3 ... parallele Gerade zu den Ordinatenax‹ zu ziehen und ihre Schnittpunkte abzuzähl‹ .

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

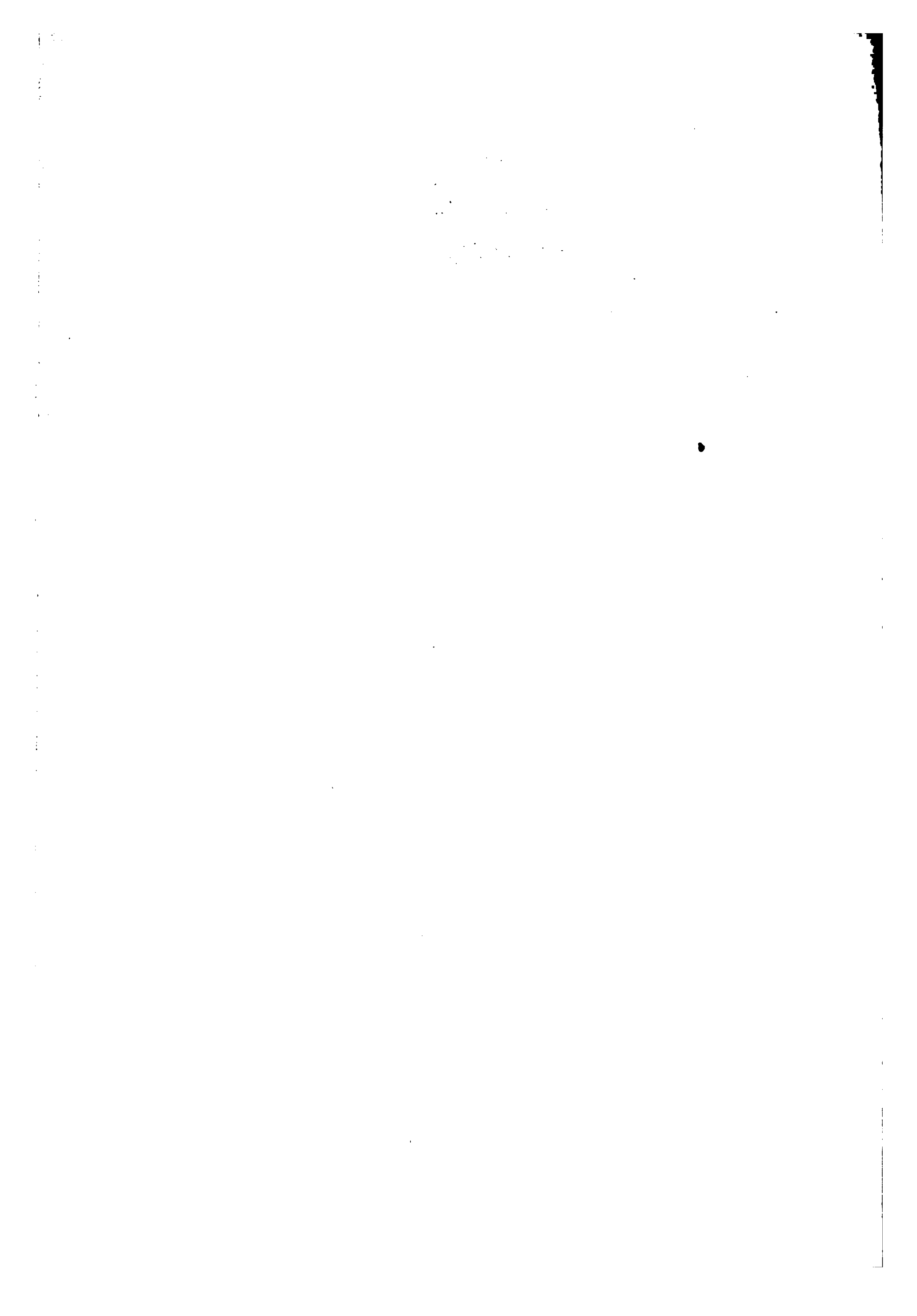
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

l rch jede Buchhandlung bezogen werden.

-nrlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

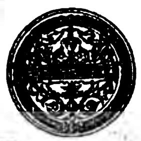
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



773. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung
Erster Teil.
Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.
Forts. v. Heft 772. — Seite 17—32.
Mit 4 Figuren.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 772. Seite 17—32. — Mit 4 Figuren.

Inhalt:
..öste Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit. — Ueber die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Stuttgart 1890.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst Angabe und **Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten.** Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht verges[...] mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Be[...] zweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital** lebendige Kraft verleihen somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** g[...]

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische [...]gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der N[...] verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfa[...] Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird deren Erledi[...] thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlun[...]**

Nun liegen auf den Geraden, die durch die Punkte auf OB gehen, deren Ordinaten sind:

$$\begin{array}{lll} 11-4\zeta & 12-4\zeta \;\ldots\ldots & 49-3\zeta \\ 78+2\zeta & 76+2\zeta \;\ldots\ldots & 2 \text{ Punkte,} \end{array}$$

also ist

$$\begin{aligned} S_{2\zeta} &= 2+4+6+\ldots+78+2\zeta \\ &= 2\,[1+2+3+\ldots+79+\zeta] \\ &= (49+\zeta)(40+\zeta) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (15) \end{aligned}$$

Ist dann

β) $z = 2\zeta + 1$, so wird

$$NP = 81 + 2\zeta$$
$$ON = 8 - 4\zeta$$

und $$OB = 48 - 3\zeta + \frac{1}{2}$$

Man hat daher auf den Geraden parallel zur x-Achse mit den Ordinaten:

$$\begin{array}{lll} 9-4\zeta & 10-4\zeta \ldots\ldots & 48-3\zeta \\ 79+2\zeta & 77+2\zeta \ldots\ldots & 1 \text{ Punkte,} \end{array}$$

also ist

$$\begin{aligned} S_{2\zeta+1} &= 1+3+\ldots\ldots+79+2\zeta \\ &= (40+\zeta)^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (16) \end{aligned}$$

S_z' findet man auf dieselbe Art, indem man auf MP die Punkte $1, 2 \ldots 9-2z$ markiert, auf MC die Punkte:

$$81+z,\; 82+z \ldots 89-z$$

indem der Punkt C für den $OC = 90 - z$ wird, nach der zweiten Gleichung (8), wenn man $y = o$ setzt, nicht mehr zu zählen ist. Nun liegen auf den Geraden die parallel zu MP gehen, durch die Punkte:

$$\begin{array}{ll} 81+z, & 82+z \ldots 89-z \\ 9-2z & 8-2z \ldots\ldots 1 \end{array}$$

der gesuchten Punkte, also ist

$$\begin{aligned} S_z' &= 1+2+3+\ldots+9-2z \\ &= (9-2z)(5-z) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (17) \end{aligned}$$

Was endlich S_z'' anbelangt, so ist dieses einfach zu berechnen. Jede zu OM parallele Gerade enthält $81 + z$ Punkte, die ganzzahlige Abscissen besitzen, indem alle Geraden die Länge $OM = 81 + z$ besitzen. Nun hat man durch die Punkte auf ON, die die Abstände

$$1,\; 2,\; 3 \ldots 10-2z$$

besitzen, solche Geraden zu ziehen und alle auf ihnen liegende Punkte mit ganzzahligen Abscissen sind die verlangten. Ihre Summe ist also

$$S_z'' = (10-2z)(81+z) \;\ldots\ldots (18)$$

Die Anzahl aller gesuchten Punkte innerhalb des Viereckes $BPCO$ ist dann

$$S_z + S_z' + S_z''$$

Um die verlangte Zahl der Punkte überhaupt zu finden, haben wir jetzt z die Werte 1, 2, 3, 4 beizulegen, alle so erhaltenen S_z zu summieren.

Die Anzahl sei A_2, dann ist

$$A_2 = S_1 + S_1' + S_1'' + S_2 + S_2' + S_2'' + S_3 + S_3' + S_3'' + S_4 + S_4' + S_4''$$
$$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_1' + S_2' + S_3' + S_4' + S_1'' + S_2'' + S_3'' + S_4''$$

und wenn man die Werte hiefür aus (15), (16), (17) und (18) einsetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} A_2 &= (40)^2 + 40.41 + (41)^2 + 41.42 \\ &+ 7.4 + 5.3 + 3.2 + 1.1 \\ &+ 8.82 + 6.83 + 4.84 + 2.85 \\ &= 8353 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (19) \end{aligned}$$

Die Anzahl aller günstigen Fälle ist mithin

$$g = A_1 + A_2 = 25706$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach Formel 1:

$$w = \frac{25706}{117480} = 0{,}21881 \; \ldots\ldots \; (20)$$

2. Auflösung. Statt der eben dargelegten Methode kann man eine andere benutzen, die zwar nicht den genauen Wert von w liefern wird, aber einen immerhin gut angenäherten. Durch die Einführung von x, y, z haben wir das Problem darauf reduziert, die Anzahl Kombinationen ganzer Zahlen zu finden, welche den Bedingungen

$$\begin{aligned} &x + 2y + 3 \leqq 100 \\ &x + y + z \leqq 90 \; \ldots\ldots\ldots \; (21) \\ &x > o \quad y > o \quad z > o \end{aligned}$$

genügen. Deuten wir x, y, z als rechtwinklige Raumcoordinaten, so stellt die Gleichung

$$x + 2y + 3z = 100 \; \ldots\ldots \; (22)$$

eine Ebene dar, welche die Achsen ox, oy, oz in den Punkten A, B, C schneidet, so dass

$$\begin{aligned} &\text{für } A\text{:} \quad x = OA = 100 \quad y = o \quad z = o \\ &\;\;\text{„}\; B\text{:} \quad y = OB = 50 \quad x = o \quad z = o \, .. (23) \\ &\;\;\text{„}\; C\text{:} \quad z = OC = 33\tfrac{1}{3} \quad x = o \quad y = o \end{aligned}$$

ist (vergl. hiezu und für das Folgende das Lehrbuch über analytische Geometrie des Raumes der Kleyerschen Encyklopädie). Diese Ebene

ist, Figur 3, durch ihre Spuren AB, BC, CA in den Coordinatenebenen versinnlicht.

Analog stellt

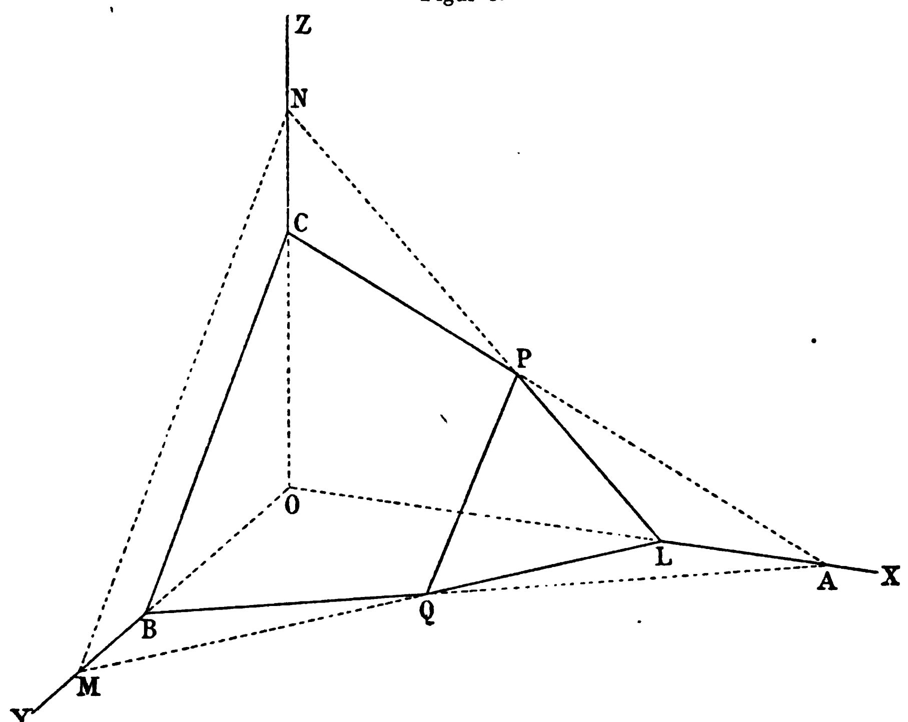
$$x + y + z = 90 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

eine zweite Ebene dar, welche die Achsen ox, oy, oz in den Punkten L, M, N schneidet, so dass

$$\begin{array}{llll} \text{für } L: & x = OL = 90 & y = o & z = o \\ \text{„ } M: & y = OM = 90 & x = o & z = o \ldots (25) \\ \text{„ } N: & z = ON = 90 & x = o & y = o \end{array}$$

ist. Diese Ebene ist in Figur 3 durch ihre Spuren LM, MN, NL versinnlicht.


Figur 3.



Beide Ebenen schneiden einander längs der Geraden PQ, wobei P der Schnittpunkt der Spuren LN und AC, und Q der Schnittpunkt der Spuren LM und AB ist.

Dem Punkte P kommen also die Koordinaten zu, welche sich aus (22) und (24) ergeben, wenn in denselben $y = o$ gesetzt wird, sie sind also:

$$x = 85 \quad y = o \quad z = 5 \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Die Koordinaten von Q ergeben sich aus

denselben Gleichungen, wenn in denselben $z = o$ gesetzt wird:

$$x = 80 \quad y = 10 \quad z = o \quad \ldots \ldots (27)$$

Dies vorausgeschickt stellen die Bedingungen

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z \leqq 100 \\ x > o, \quad y > o, \quad z > o \end{array} \quad \ldots \ldots (28)$$

offenbar alle Punkte vor, welche in dem positiven Raume (der Raum, für welchen alle Koordinaten positiv sind) des Koordinatensystems liegen, der von den drei Koordinatenebenen oxy, oxz, oyz und der Ebene ABC, deren Gleichung

$$x + 2y + 3z = 100$$

ist, begrenzt wird.

Analog stellen die Bedingungen

$$\begin{array}{l} x + y + z \leqq 90 \\ x > o, \quad y > o, \quad z > o \end{array} \quad \ldots \ldots (29)$$

alle Punkte dar, welche in dem positiven Raume liegen, den die Koordinatenebenen oxy, oxz, oyz mit der Ebene LMN, deren Gleichung

$$x + y + z = 90$$

ist, begrenzen.

Also stellen die Bedingungen

$$\begin{array}{lll} x + 2y + 3z \leqq 100 & & \\ x + y + z \leqq 90 & & \\ x > o & y > o & z > o \end{array}$$

zusammen alle Punkte vor, welche innerhalb des Körpers $OLPCBQ$ liegen.

Betrachten wir jetzt blos die Punkte, welche ganzzahlige Koordinaten besitzen, so stellen die Bedingungen (29)

$$\begin{array}{l} x + y + z \leqq 90 \\ x > o \quad y > o \quad z > o \end{array}$$

offenbar alle Kombinationen der 90 Ziffern 1 bis 90 zu dreien vor, also alle möglichen Fälle für unser Ereignis, das in dem Ziehen von drei Nummern besteht. Wir setzen nun statt dieser Anzahl das Volumen des Tetraeders $OLMN$, welches offenbar grösser ist. Würde man über OL, OM, ON den Kubus konstruieren, so wäre sein Volumen genau gleich der Anzahl Punkte, deren Koordination ganze Zahlen sind, indem der Kubus durch die Ebenen, welche im Abstande 1, 2, 3 ... 90 parallel zu den Koordinatenebenen gelegt werden in kleine Würfel von der Seitenlänge 1 zerlegt würde, deren Anzahl das Volumen und gleichzeitig die Anzahl ihrer Ecken angeben

würde. Diese Ecken sind aber die Punkte, denen ganzzahlige Koordinaten zukommen. Wird nun von dem Kubus durch die Ebenen LMN ein Tetraeder abgeschnitten, so gehören zu seinem Volumen noch eine Anzahl von kleinen Tetraedern, die durch die Ebene LMN aus den Würfeln ausgeschnitten werden, deren Ecken in ihr liegen. Um das Volumen dieser kleinen Tetraeder, die ihre Grundflächen alle in der Ebene LMN liegen haben, wird das Volumen des Tetraeders $OLMN$ grösser sein als die Anzahl Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Wir lassen aber diesen Fehler in der Rechnung, da er durch den analogen Fehler bei der Berechnung der Punkte, welche der Bedingung (21) nämlich

$$x + 2y + 3z \leqq 100$$
$$x + y + z \leqq 90$$
$$x > o \qquad y > o \qquad z > o$$

genügen, in etwa kompensiert wird. Wir setzen nämlich auch hier an Stelle der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten das Volumen des Körpers $OLPCBQ$, Figur 3. Diese Zahl wird dann offenbar die Anzahl günstiger Fälle vorstellen, in denen nämlich die Summe der drei gezogenen Nummern unter 101 ist.

Wir schreiten nun zur Berechnung der Körperinhalte dieser Körper (vergl. hiezu Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen).

Das Volumen des Tetraeders $OLMN$ ergibt sich einfach als der sechste Teil des Würfels über OL, OM, ON, also ist

$$m = \frac{1}{6} \cdot 90^3$$

Das Volumen g des Körpers $OLPCBQ$ berechnen wir als Differenz der Volumina der beiden Tetraeder $OABC$ und $LAPQ$, so dass

$$g = OABC - LAPQ.$$

Das Tetraeder $OABC$ ist rechtwinklig bei O, also ist das Volumen

$$OABC = \frac{1}{3}\text{ Fläche } OBC \,.\, OA$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \,.\, OC \,.\, OA$$
$$= \frac{1}{6} \cdot 50 \,.\, 33\frac{1}{3} \,.\, 100$$
$$= \frac{1}{18}\, 500000$$

Das Volumen $LAPQ$ berechnen wir nach dem Satze aus der analytischen Geometrie des Raumes mittels einer Determinante. (Vergl. die nebenstehende Erklärung.)

Erkl. 13. Sind $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$; $x_3 y_3 z_3$; $x_4 y_4 z_4$ die rechtwinkligen Koordinaten von vier Punkten des Raumes, so ist das Volumen des Tetraeders, welches diese vier Punkte bestimmen

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

wobei das Zeichen + oder — so gewählt wird, dass V sich positiv ergibt. (Siehe das Lehrbuch der Kleyerschen Encyklopädie über analytische Geometrie des Raumes). Die Determinante kann tentwickelt werden nach den Sätzen über Determinanten, wie sie in dem betreffenden Lehrbuch der Kleyerschen Encyklopädie entwickelt werden.

Hilfsrechnung.

Entwickelt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} 90 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & 0 & 1 \\ 85 & 0 & 5 & 1 \\ 80 & 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D$$

nach den Elementen der 3ten Kolumne, so bleibt nur die Unterdeterminante des 3ten Elementes: 5, welches nicht 0 ist, mit diesem multipliziert übrig, d. h. es ist

$$D = 5 . \begin{vmatrix} 90 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & 1 \\ 80 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

Die Determinante rechts wieder, nach den Elementen der 2. Kolumne entwickelt, gibt

$$D = 5 . 10 \begin{vmatrix} 90 & 1 \\ 100 & 1 \end{vmatrix}$$

und schliesslich

$$D = 5 . 10\ (90-100)$$
$$= -500$$

$$LAPQ = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 90 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & 0 & 1 \\ 85 & 0 & 5 & 1 \\ 80 & 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\ 500$$

also ist

$$g = \frac{1}{18}\ 500000 - \frac{1}{18}\ 1500$$
$$= \frac{1}{18} . 498500$$

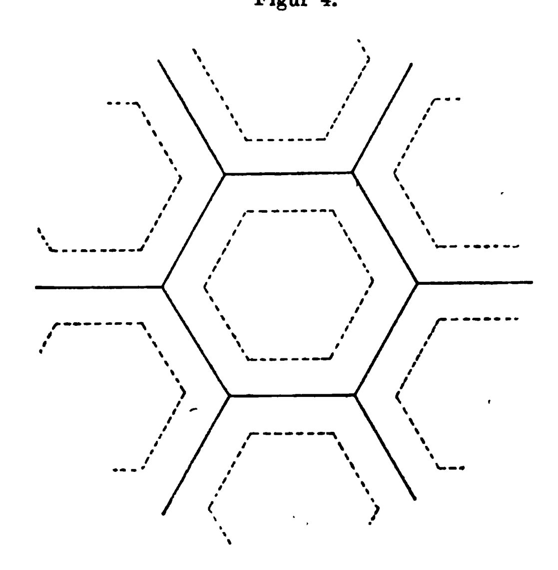
und mithin haben wir

$$w = \frac{498500}{3 . 90^3} = \frac{4985}{21870}$$
$$= 0{,}2233$$

Berücksichtigt man bei beiden Auflösungsarten blos die ersten zwei Dezimalstellen, so ergeben sich dieselben Werte für w, wenn man in Gleichung (20) die Korrektur wegen der 8 in der dritten Dezimalstelle nimmt.

Aufgabe 15. Der Fussboden eines Zimmers ist mit regulären sechseckigen Parquetten belegt, man wirft eine Münze, deren Durchmesser die Länge 2a hat, auf den Boden, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze ganz auf eine Parquette zu liegen kommt?

Figur 4.



Auflösung. Die Figur 4 stelle einen Teil des Fussbodens dar, dessen Parquetten durch die vollen Linien angedeutet sind. Die punktierten Sechsecke haben zu den ersteren parallele Seiten, sind aber im Abstande a von diesen gezogen.

Wirft man die Münze auf den Boden, so kann ihr Mittelpunkt offenbar auf irgend einen Punkt des Fussbodens fallen, aber nur wenn derselbe innerhalb eines der punktierten Sechsecke zu liegen kommt, wird die Münze ganz auf einer Parquette liegen, da ihr Mittelpunkt um mehr als die Länge a ihres Halbmessers von dem Rande der Parquette absteht.

Betrachten wir eine einzige Parquette. Dieselbe ergibt als Möglichkeiten der Lage des Mittelpunktes der auf sie fallenden Münze so viele, als Punkte innerhalb des Sechseckes liegen. Diese Zahl ist unendlich gross, als ihr Mass kann aber die Fläche des Sechseckes gelten. Denn denkt man sich für einen Augenblick statt der Punkte unendlich kleine gleiche Flächenteilchen, etwa kleine Rechtecke gesetzt (wie es in der Integralrechnung bei der Flächenberechnung geschieht, vergl. Kleyers Lehrbuch der Integralrechnung), so ist klar, dass die Anzahl dieser Flächenteilchen der

Fläche proportional ist. Ist also F die Fläche des Sechseckes, so kann die Anzahl m der innerhalb desselben gelegenen Punkte durch

$$m = k \,.\, F$$

ausgedrückt werden, wo streng genommen k eine unendlich grosse Konstante ist. Fällt der Mittelpunkt der Münze innerhalb des punktierten Sechseckes, so ist dies ein günstiger Fall für unser Ereignis. Bezeichnet f die Fläche des punktierten Sechseckes, so wird die Anzahl günstiger Fälle wieder durch

$$g = k \,.\, f$$

dargestellt.

Sind nun n-Parquetten auf dem Fussboden, auf denen jede die Münze zu liegen kommen kann, so wird die Anzahl aller möglichen Fälle offenbar

$$M = n \,.\, m = n \,.\, k \,.\, F$$

und die Anzahl aller günstigen Fälle

$$G = n \,.\, g = n k \,.\, f$$

sein, also ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{G}{M} = \frac{n k \,.\, f}{n k F}$$

oder

$$w = \frac{f}{F}$$

so dass die (unendlich grosse) Konstante k ganz ausgefallen ist, und w sich in vollständig bestimmter Form ergibt.

Aufgabe 16. Ein dünnes Stäbchen wird in drei Teile gebrochen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich aus den drei Teilen ein Dreieck bilden lässt?

Auflösung. Sei C die Länge des Stäbchens und x, y, z die drei Teile, in welche man es zerbrochen hat, so ist

$$x + y + z = C \quad \ldots\ldots. \quad (1)$$

Damit aber aus den drei Stücken x, y, z ein Dreieck zusammengestellt werden kann, muss

$$\begin{aligned} x &< y + z \\ y &< x + z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2) \\ z &< y + x \end{aligned}$$

sein (vergl. das Lehrbuch der ebenen Elementargeometrie der Kleyerschen Encyklopädie).

Die Gleichung (1) ergibt für x, y, z alle möglichen Fälle, wobei selbstverständlich nur die positiven Werte von x, y, z zulässig sind, welche der Gleichung (1) genügen, die Bedingungen (2) scheiden aus diesen die günstigen

Fälle aus. Beide Anzahlen sind natürlich unendlich gross.

Deuten wir x, y, z als rechtwinklige Raumkoordinaten, so bedeutet (1) die Gleichung einer Ebene, welche die Koordinatenaxen in den Punkten A, B, C schneidet, so dass Figur 5

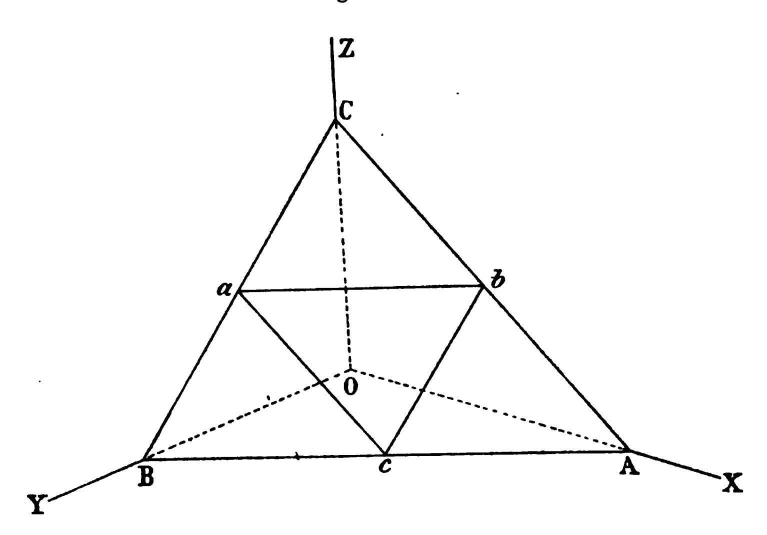
$$OA = OB = OC = C$$

ist. Das Dreieck ABC ist also ein gleichseitiges und jeder Punkt desselben hat Koordinaten x, y, z, welche der Gleichung (1) genügen und positiv sind, also ist die Anzahl möglicher Fälle nach denselben Schlüssen, wie in Aufgabe 16

$$m = k . F$$

wenn F die Fläche des Dreieckes ABC ist.

Figur 5.



Wir berechnen nun die günstigen Fälle. Die Bedingung

$$x < y + z$$

sagt aus, dass die x, welche ihr genügen, kleiner sind als die, welche der Gleichung

$$x = y + z$$

genügen. Diese Gleichung stellt aber eine Ebene dar, welche die Ebene des Dreieckes ABC in der Geraden bc schneidet, so dass $bA = bC$ und $cA = cB$ ist. Denn setzt man in den beiden Gleichungen

$$x + y + z = C$$
$$x = y + z$$

das einemal $y = O$, so ergibt sich für die Koordinaten des Punktes b

$$x + z = C$$
$$x = z$$

also

$$x = z = \frac{1}{2} C$$

Daher ist b die Mitte von AC. Setzt man in den Gleichungen $z = O$, so ergibt sich

$$x = y = \frac{1}{2} C$$

also ist c die Mitte von AB. Die Punkte des Dreieckes ABC nun, für welche

$$x < y + z$$

müssen in dem Trapez $CbcB$ liegen, da ihre x kleiner sind als die der Geraden bc.

Ist nun a die Mitte von BC, so folgt ganz analog, dass die Punkte des Dreieckes, für welche

$$y < x + z$$

innerhalb des Trapezes $CacA$ liegen müssen und die Punkte, für welche

$$z < y + x$$

innerhalb des Trapezes $BabA$ gelegen sind.

Daher sind alle Punkte, für welche gleichzeitig

$$x < y + z$$
$$y < x + z$$
$$z < x + y$$

ist, innerhalb des Dreieckes abc gelegen. Ist also f die Fläche dieses Dreieckes, so ist die Anzahl der günstigen Fälle

$$g = k \,.\, f$$

und es folgt also für die Wahrscheinlichkeit w, dass aus x, y, z ein Dreieck zusammengestellt werden kann

$$w = \frac{k \,.\, f}{k \,.\, F} = \frac{f}{F}$$

Nun ist aber offenbar das Dreieck abc auch gleichseitig und seine Seiten sind halb so lang als die Seiten des Dreieckes A, B, C, also ist

$$F = 4 \,.\, f$$

und daher

$$w = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 17. Zwei Personen A und B verabreden an einem bestimmten Tage ein Rendezvous. Die Zeit desselben fixieren sie zwischen 2 und 3 Uhr nachmittags und jeder verspricht, falls er früher kommt auf den anderen 10 Minuten warten zu wollen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Personen einander treffen?

Auflösung. Sei x Zeit, die A nach 2 Uhr an dem Orte erscheint und y dieselbe für B. Dann kann sowohl x als y alle Werte zwischen 0 und 60 annehmen, wenn wir die Zeit in Minuten ausdrücken. Sollen einander die beiden treffen, so muss sowohl

$$x < y < x + 10$$

als

$$y < x < x + 10$$

sein, denn jeder will auf den anderen blos 10 Minuten warten. Hiebei ist die erste Bedingung in dem Falle, dass A früher kommt, die zweite, dass B früher kommt zu berücksichtigen.

Deuten wir x, y als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so stellen alle Kombinationen von x und y die Punkte des Quadrates $OACB$, Figur 6, dar, dessen Seiten $OA = OB = 60$ sind. Die Anzahl möglicher Fälle ist also

$$m = k \,.\, 60^2$$

Figur 6.

für die günstigen Fälle ergibt sich, wenn

1. A zuerst kommt, die Bedingungen

$$x < y < x + 10$$

Nun stellt

$$x = y$$

die Gleichung der Geraden OC dar und

$$y = x + 10$$

ist die Gleichung der Geraden PQ, die parallel zu OC ist, wobei $OP = 10$ sein muss.

Die Punkte nun, für welche $x < y$ ist, liegen über der Geraden OC und die Punkte, für welche $y < x + 10$ ist, liegen unterhalb der Geraden PQ. Die Punkte also, für welche

$$x < y < x + 10$$

ist, liegen innerhalb des Trapezes $OCPQ$ und für jeden dieser Punkte ergibt sich ein x und ein y, welches unserem Ereignisse günstig ist. Es ist also, wenn f die Fläche dieses Trapezes ist

$$g_1 = k \,.\, f_1$$

wobei

$$f_1 = OCB - PQB = \frac{1}{2}\, OB \,.\, BC - \frac{1}{2}\, BP \,.\, BC$$
$$= 60 \,.\, 30 - 50 \,.\, 25$$
$$= 550$$

2. Kommt B zuerst, so muss

$$y < x < y + 10$$

Man erkennt sofort, dass dann die günstigen Fälle dargestellt werden durch die Punkte des Trapezes $ORSC$, wenn $OR = 10$ ist; und es ergibt sich wieder die Fläche dieses Trapezes

$$f_2 = 550$$

Für das Ereignis sind also die günstigen Fälle

$$g = k\,(f_1 + f_2) = k \,.\, 1100$$

also ergibt sich

$$w = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$$

C. Über die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Anmerkung 5. Betreffs der Definition der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit vergleiche die Anmerkung 2.

Frage 5. Das Ereignis E_1 hat die Wahrscheinlichkeit w_1, ein anderes Ereignis E_2 die Wahrscheinlichkeit w_2 für das Eintreffen. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit w des Ereignisses E, welches darin besteht, dass entweder E_1 oder E_2 eintritt?

Antwort. Die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass E_1 oder E_2 eintritt, ist gegeben durch die

Formel 3: $w = w_1 + w_2$

Beweis. Es sei

$$w_1 = \frac{g_1}{m}, \quad w_2 = \frac{g_2}{m}$$

und wir stellen uns wieder die Ereignisse als das Ziehen von Kugeln aus einer Urne vor.

Es seien in einer Urne g_1 weisse, g_2 rote und $m - g_1 - g_2$ schwarze Kugeln vorhanden. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel

$$w_1 = \frac{g_1}{m}$$

Erkl. 14. Man kann w_1 und w_2 denselben Nenner m geben, da man die Brüche erweitern kann; wobei $m > g_1 + g_2$ sein muss, da sonst mehr günstige als mögliche Fälle für E vorhanden wären.

und die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel

$$w_2 = \frac{g_2}{m}$$

Will man nun die Wahrscheinlichkeit w für das Ziehen einer weissen oder roten Kugel berechnen, so geht man auf die Formel 1 zurück. Offenbar sind für dieses Ereignis $(g_1 + g_2)$ günstige Fälle, indem $(g_1 + g_2)$ weisse und rote Kugeln in der Urne sind. Es wird also nach Formel 1

$$w = \frac{g_1 + g_2}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} = w_1 + w_2$$

sich ergeben, wie z. B. w.

Anmerkung 6. Ist w die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, w' die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit desselben Ereignisses, so ist die Wahrscheinlichkeit W, dass das Ereignis eintritt oder nicht eintritt, nach Formel 3:

$$W = w + w'$$

Da nun gewiss ist, dass das Ereignis eintritt oder nicht eintritt, so ist $W = 1$, daher ist

$$1 = w + w'$$

welches die Formel 2 ist.

Frage 6. Die Ereignisse $E_1, E_2 \ldots E_k$ haben die Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2 \ldots w_k$ für ihr Eintreffen. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit w für das Ereignis E, das darin besteht, dass irgend eines der Ereignisse eintritt?

Antwort. Die Wahrscheinlichkeit w, dass irgend eines der Ereignisse E_1, $E_2 \ldots E_k$ eintritt, denen die Wahrscheinlichkeiten w_1', $w_2 \ldots w_k$ zukommen, ist gegeben durch die

Formel 3': $w = w_1 + w_2 + \ldots + w_k$

Da man

$$w_1 = \frac{g_1}{m},\ w_2 = \frac{g_2}{m} \ldots . w_k = \frac{g_k}{m}$$

setzen kann, indem alle Brüche gleiche Nenner haben, und

$$m \geqq g_1 + g_2 + \dots + g_k$$

sein muss (vgl. die Erklärung 14), so kann der Beweis genau so geführt werden, wie für Formel 3.

Anmerkung 7. Schliessen die Ereignisse $E_1, E_2 \dots E_n$ einander aus, d. h. muss irgend eines eintreten, so besteht die Relation:

Formel 2': $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$

denn es ist sicher, dass irgend eines der Ereignisse eintritt, also ist in Formel 3': $w = 1$

Anmerkung 8. Es ist von besonderer Wichtigkeit, die beiden Fälle von einander zu unterscheiden, ob die Ereignisse von einander unabhängig sind oder ob sie einander beeinflussen. Es wird später dieser Umstand an besonderen Beispielen noch klarer dargelegt werden.

Frage 7. Den Ereignissen $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$ sollen die Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ zukommen, wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit w des Ereignisses E, das darin besteht, dass sowohl E_1 als E_2 als $E_3 \dots$ als E_k eintritt?

Erkl. 15. Es wird vorausgesetzt, dass die Ereignisse $E_1, E_2 \dots E_k$ von einander unabhängig sind, dass also der Eintritt irgend eines den Eintritt irgend eines andern in keiner Weise beeinflusst.

Antwort. Sind $w_1, w_2 \dots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der Ereignisse $E_1, E_2 \dots E_n$, die einander nicht beeinflussen, so ist die Wahrscheinlichkeit w, dass die Ereignisse gleichzeitig eintreffen, gegeben durch die

Formel 4: $w = w_1 . w_2 \dots . w_n$

d. h. die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist das Produkt aus den einfachen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

Der Beweis der Formel ergibt sich folgendermassen:

Es seien vorerst bloss zwei Ereignisse E_1, E_2 betrachtet, denen die Wahrscheinlichkeiten

$$w_1 = \frac{g_1}{m_1} \qquad w_2 = \frac{g_2}{m_2}$$

zukommen. Wir versinnlichen uns die Ereignisse als das Ziehen von Kugeln

aus zwei Urnen U_1 und U_2, von denen U_1 unter den m_1 Kugeln g_1 weisse und $m_1 - g_1$ schwarze enthält, während U_2 g_2 weisse und $m_2 - g_2$ schwarze einschliesst. w_1 ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel aus U_1 und w_2 diejenige für das Ziehen einer weissen Kugel aus U_2.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass aus der Urne U_1 und U_2 je eine weisse Kugel gezogen wird, ist w. Hiebei ist es natürlich gleichgiltig, ob man zuerst aus der Urne U_1 einen Zug macht und dann aus der Urne U_2, oder ob man gleichzeitig mit der einen Hand aus der Urne U_1, mit der anderen aus der Urne U_2 je eine Kugel zieht. Die beiden Ereignisse sind von einander vollständig unabhängig, denn das Ziehen der Kugel aus der einen Urne beeinflusst in keiner Weise den Zug aus der anderen. Um die Wahrscheinlichkeit w zu berechnen, haben wir die Formel 1 zu benützen und daher die Anzahl m aller möglichen Fälle und sodann die Anzahl g aller günstigen Fälle für den Eintritt des Ereignisses zu suchen, welches in dem Ziehen je einer Kugel aus beiden Urnen besteht.

Erkl. 16. Man beachte den Unterschied zwischen hier und dem Beweise der Formel 3. Während es sich dort handelte, dass eine weisse *oder* eine schwarze Kugel gezogen wird, handelt es sich hier darum, aus U_1 eine weisse *und* aus U_2 auch eine weisse Kugel zu ziehen. Während dort E darin bestand, dass E_1 *oder* E_2 eintritt, besteht E hier darin, dass *sowohl* E_1 *als* E_2 eintritt.

1. *Berechnung der Anzahl m der möglichen Fälle.* Zieht man aus U_1 eine bestimmte Kugel, so kann man aus U_2 noch irgend eine der m_2 Kugeln herausziehen, das gibt also m_2 Möglichkeiten für jede der m_1 Kugeln aus der Urne U_1, also im Ganzen

$$m = m_1 . m_2$$

mögliche Fälle.

2. *Berechnung der Anzahl g der günstigen Fälle.* Ein dem Ereignisse günstiger Fall tritt ein, wenn man aus U_1 eine weisse Kugel und aus U_2 auch eine weisse Kugel zieht. Hat man aber aus U_1 eine weisse Kugel gezogen, so kann man aus U_2 noch irgend eine der g_2 weissen Kugeln herausziehen. Dies gibt für jede der g_1 weissen Kugeln aus U_1 noch g_2 günstige Züge aus U_2, also im ganzen

$$g = g_1 \cdot g_2$$

günstige Fälle.

Daher ist nach Formel 1:

$$w = \frac{g_1 \cdot g_2}{m_1 \;\; m_2} = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2}$$

oder

$$w = w_1 \cdot w_2$$

Hat man nun drei von einander unabhängige Ereignisse E_1, E_2, E_3 mit den Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, w_3 und hat die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen aller drei Ereignisse zu suchen, so ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit w' für E_1 und E_2 nach eben Bewiesenem

$$w' = w_1 \cdot w_2$$

Nun betrachtet man das gleichzeitige Eintreffen von E_1 und E_2 als das Ereignis E', dessen Wahrscheinlichkeit w' ist und frägt nach der Wahrscheinlichkeit, dass E' und E_3 gleichzeitig eintritt, wodurch man die Wahrscheinlichkeit nach oben Bewiesenem

$$w = w' \cdot w_3 = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3$$

erhält dafür, dass E' d. h. E_1 und E_2 und E_3 gleichzeitig eintreten.

Es ist klar, wie man weiter gehen kann, und so die Formel 4 allgemein beweist.

Frage 8. Wie wird die Wahrscheinlichkeit W eines Ereignisses E_2 berechnet, das nur eintreten kann, wenn das Ereignis E_1 bereits eingetreten ist?

Erkl. 17. In diesem Falle sind E_1 und E_2 nicht unabhängig von einander.

Antwort. Sei die Wahrscheinlichkeit w für das Eintreffen von E_1

$$w = \frac{g}{m} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

also von den m möglichen Fällen seien g günstige. Unter den g günstigen Fällen, in denen E_1 eintreten kann, mögen e auch für E_2 günstig sein, dann sind unter allen m möglichen Fällen bloss e für den Eintritt von E_2 günstig, es ist also

$$W = \frac{e}{m} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E_2.

Da unter den g-Fällen, in denen E_1 eintreten kann, bloss e für das Eintreffen von E_2 günstig sind, so bedeutet

$$\frac{e}{g} = \omega \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E_2, nachdem E_1 eingetroffen ist. Es ist also, da nach (2)

$$W = \frac{e}{m} = \frac{g}{m} \cdot \frac{e}{g}$$

ist, mit Rücksicht auf (2) und (3)

Formel 5: $W = w \cdot \omega$

d. h. die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von E_1 und E_2, von denen E_2 nur eintreffen kann, wenn E_1 eintritt, wird berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E_1 multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E_2, nachdem E_1 als eingetroffen vorausgesetzt wird.

Frage 9. Wie wird die Wahrscheinlichkeit W für das Eintreffen der Ereignisse $E_1, E_2 \ldots E_k$ berechnet, wenn jedes Ereignis nur eintreten kann, sobald alle vorausgehenden eingetreten sind?

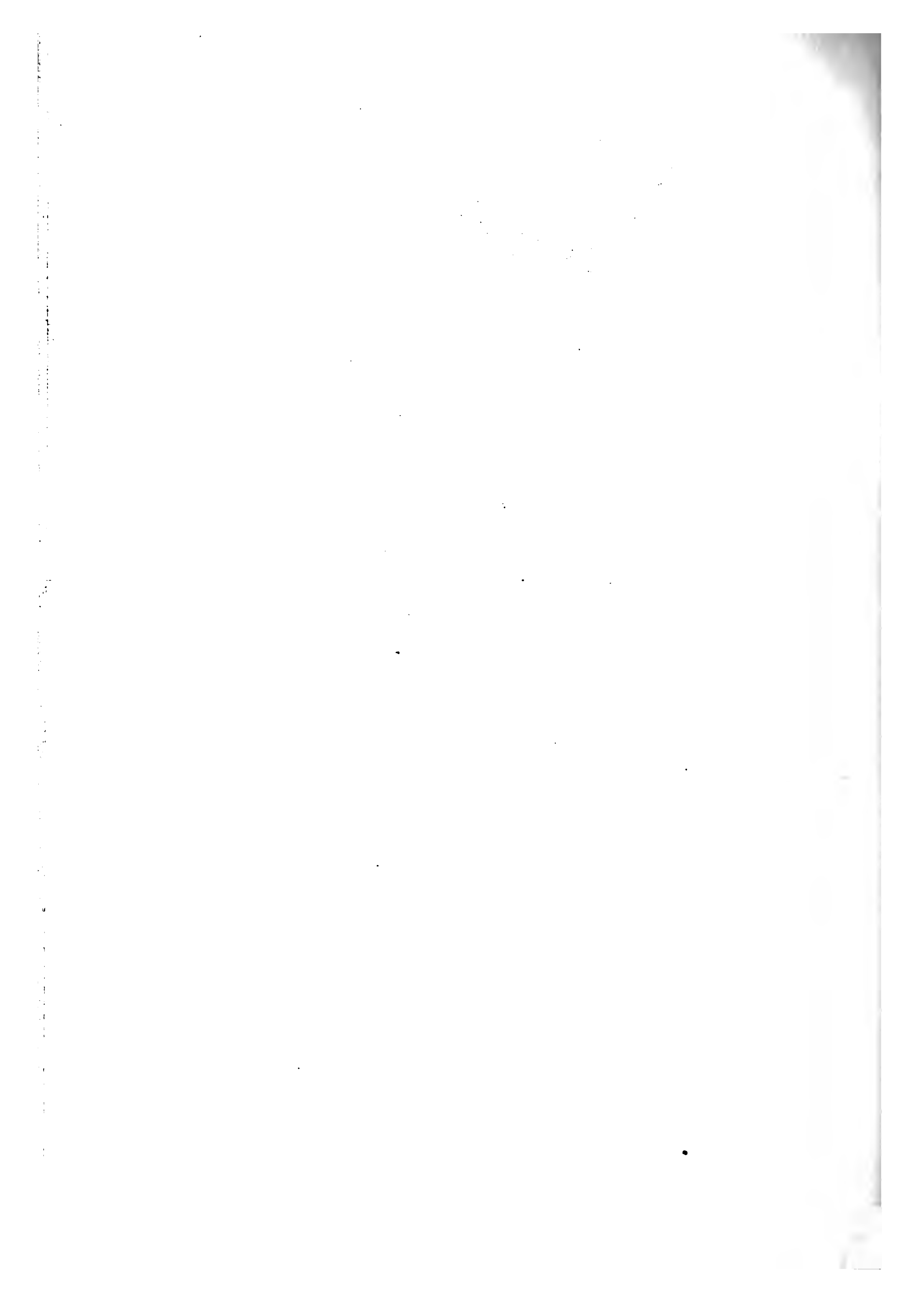
Erkl. 18. Auch hier sind, wie in der vorangehenden Frage, die Ereignisse von einander abhängig.

Antwort. Ist w_1 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E_1, ω_2 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E_2, nachdem E_1 bereits eingetroffen ist, ω_3 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E_3, nachdem E_1 und E_2 eingetroffen sind u. s. w., bis ω_k die Wahrscheinlichkeit, dass E_k eintritt, nachdem alle vorangehenden Ereignisse bereits eingetroffen sind, so ist:

Formel 5': $W = w_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \ldots \omega_k$

Der Beweis folgt aus dem Beweise für zwei Ereignisse E_1, E_2, wenn man immer das Eintreffen aller vorangehender Ereignisse als ein zusammengesetztes Ereignis betrachtet.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



792. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Erster Teil.
Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.
Forts. v. Heft 773. — Seite 33—48.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 773. — Seite 33—48.

Inhalt:

Stuttgart 1890.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergess[illegible] mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen B[illegible] zweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleih[illegible] somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen[illegible]

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische [illegible] gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der [illegible] verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Ve[illegible] Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren E[illegible] thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshand[illegible]**

Gelöste Aufgaben.

(Vergleiche die Formeln 3 und 4, sowie auch 5.)

Aufgabe 18. Eine Urne enthält n-Kugeln, man zieht irgend eine Anzahl derselben, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl eine gerade ist?

Erkl. 19. Nach dem binomischen Satze (siehe Kleyers Lehrb. der Potenzen und Wurzeln) ist

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n$$

Setzt man hierin $x = 1$, $a = 1$, so wird

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Setzt man hingegen $x = 1$, $a = -1$, so wird:

$$o = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Es ist also

$$2^n - 1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n}$$

$$1 = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \binom{n}{4} + \ldots (-1)^{n-1} \binom{n}{n}$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so folgt, wenn man beiderseits durch 2 dividiert:

$$2^{n-1} - 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots$$

Werden die Gleichungen addiert, so folgt, nachdem wieder durch 2 gekürzt worden ist:

$$2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots .$$

Auflösung. Da man 1, 2, 3, 4 ... n-Kugeln ziehen kann, so ist die Anzahl aller möglichen Fälle m die Summe aus den Zahlen, welche angeben, wie viel Kombinationen zur Klasse 1, 2, 3, 4 ... n aus den n-Kugeln gebildet werden können, d. h. es ist

$$m = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{3}{m} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n}$$

also nach nebenstehender Erklärung

$$m = 2^n - 1$$

Sei nun w_{2i} die Wahrscheinlichkeit, dafür, dass $2i$-Kugeln gezogen werden, so ist die Anzahl günstiger Fälle g_i; die Anzahl Kombinationen der n-Kugeln zur Klasse $2i$, also ist

$$g_i = \binom{n}{2i}$$

und daher ist

$$w_{2i} = \frac{g_i}{m} = \frac{\binom{n}{2i}}{2^n - 1}$$

Nun kann aber i die Werte 1, 2, 3 ... annehmen, eines der Ereignisse braucht nur einzutreten, daher ist nach Formel 3:

$$w = w_2 + w_4 + w_6 + \ldots = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots}{2^n - 1}$$

Es ist aber

$$g_1 + g_2 + g_3 + \ldots = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots$$

und diese Summe ist nach nebenstehender Erklärung

$$= 2^{n-1} - 1$$

daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^n - 1)}$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit w', d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Kugeln eine ungerade ist, ergibt sich analog, oder nach Formel 2:

$$w' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^n - 1)}$$

Es ist also wahrscheinlicher eine ungerade Anzahl zu ziehen, als eine gerade.

Aufgabe 19. In einer Urne U_1 befinden sich 2 weisse und 3 schwarze Kugeln, in einer zweiten Urne sind 3 weisse und 4 schwarze Kugeln. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man

1. aus U_1 und U_2 je eine weisse,
2. aus U_1 eine weisse, aus U_2 eine schwarze,
3. aus U_1 eine schwarze, aus U_2 eine weisse,
4. aus U_1 und U_2 je eine schwarze Kugel

zieht?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel aus U_1 oder des Ereignisses E_1 ist:

$$w_1 = \frac{2}{5}$$

die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$w'_1 = \frac{3}{5}$$

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E'_1 eine schwarze Kugel aus U_1 zu ziehen.

Für das Ereignis E_2 des Ziehens einer weissen Kugel aus U_2 ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$w_2 = \frac{3}{7}$$

und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$w'_2 = \frac{4}{7}$$

die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel aus U_2 oder des Ereignisses E'_2. Die Ereignisse E_1, E'_1, E_2, E'_2 sind von einander unabhängig.

Es ist daher die Wahrscheinlichkeit für die zusammengesetzten Ereignisse

$$1)\ E_1 . E_2 \ldots . W_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$$

$$2)\ E_1 . E'_2 \ldots . W_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35}$$

$$3)\ E'_1 . E_2 \ldots . W_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{35}$$

$$4)\ E'_1 . E'_2 \ldots . W_4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

Hiemit ist die Aufgabe gelöst. Wir bemerken aber noch Folgendes: Zieht man aus beiden Urnen Kugeln, so muss notwendig einer der 4 Fälle eintreten, die wir eben betrachteten,

daher muss nach der Anmerkung 7 (Seite 29) Formel 2'

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 1$$

was auch thatsächlich der Fall ist, indem

$$\frac{6}{35} + \frac{8}{35} + \frac{9}{35} + \frac{12}{35} = \frac{35}{35} = 1$$

ist.

Aufgabe 20. In einer Urne U_1 sind 2 weisse und 3 schwarze Kugeln, man zieht 3 Kugeln aus der Urne heraus und wirft sie in eine zweite Urne U_2, aus der man nun eine Kugel herauszieht, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel eine weisse ist?

Erkl. 20. Die Ereignisse E_1 und E_2, welche aus dem Ziehen der Kugeln aus der Urne U_1 und U_2 bestehen, hängen von einander ab. Und zwar kann das zweite E_2 nur eintreten, wenn E_1 einer der beiden Fälle ist, dass man aus U_1 entweder 1 oder 2 weisse Kugeln gezogen hat. Denn würde man aus U_1 keine weisse Kugel ziehen, dann könnte man aus U_2 auch keine ziehen.

Auflösung. Man muss die beiden Fälle unterscheiden

1. aus U_1 wird 1 weisse und 2 schwarze,
2. aus U_1 werden 2 weisse und 1 schwarze Kugel

gezogen. Dann seien mit w_1 und w_2 die Wahrscheinlichkeiten bezeichnet, dass man aus der Urne U_2 eine weisse Kugel zieht. Da nun der eine oder der andere Fall eintreten kann, so ist nach Formel 3

$$w = w_1 + w_2 \qquad (1)$$

Berechnung von w_1. Da die Urne U_1 5 Kugeln enthält, so geben diese nach Formel (a)

$$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$$

Kombinationen zu dreien, also 10 Möglichkeiten 3 Kugeln herauszuziehen. Günstige Fälle werden die sein, welche 1 weisse und 2 schwarze Kugeln enthalten.

Die 3 schwarzen Kugeln geben

$$\binom{3}{2} = \frac{3.2}{1.2} = 3$$

Kombinationen zu 2, deren jede mit jeder der beiden weissen Kugeln eine günstige Kombination gibt. Es sind also 2.3 günstige Fälle, und daher ist die Wahrscheinlichkeit aus der Urne U_1 eine weisse und zwei schwarze Kugeln zu ziehen

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Wirft man nun die drei Kugeln in die Urne U_2, so werden in ihr 1 weisse und 2 schwarze sich vorfinden, die Wahrscheinlichkeit aus U_2 eine weisse Kugel zu ziehen ist, also

$$\frac{1}{3}$$

und mithin ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit nach Formel 5:

$$w_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

Berechnung von w_2. Die Anzahl Möglichkeiten für das Ergreifen von drei Kugeln aus U_1 ist wieder 10. Günstige Fälle sind aber jetzt die, in welchen 2 weisse und 1 schwarze Kugel auftritt. Es sind also soviel günstige Fälle als die 2 weissen Kugeln mit den 3 schwarzen solche Kombinationen bilden können; d. h. es sind blos 3 günstige Fälle, also ist die Wahrscheinlichkeit aus U_1 zwei weisse und eine schwarze Kugel zu ziehen:

$$\frac{3}{10}$$

Wirft man nun die drei gezogenen Kugeln in die Urne U_2, so ist die Wahrscheinlichkeit aus dieser eine weisse Kugel zu ziehen:

$$\frac{2}{3}$$

also ist nach Formel 5

$$w_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

und mithin nach Gleichung (1)

$$w = w_1 + w_2 = \frac{2}{5}$$

Aufgabe 21. In einer Urne sind a weisse und b schwarze Kugeln, man zieht zweimal hintereinander je eine Kugel heraus, wobei man aber immer die gezogene Kugel wieder in die Urne zurücklegt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

1. beidesmal weisse Kugeln,
2. das erstemal eine weisse, das zweitemal eine schwarze,
3. das erstemal eine schwarze, das zweitemal eine weisse Kugel und
4. beidesmal schwarze Kugeln zieht?

Erkl. 21. Die beiden Ziehungen sind von einander unabhängige Ereignisse. Denn die Anzahl Kugeln ist beim ersten und zweiten Zug dieselbe, da man die gezogene Kugel wieder zurücklegt.

Auflösung. Es sei w die Wahrscheinlichkeit bei dem ersten, also auch bei dem zweiten Zug eine weisse Kugel zu ziehen, w' die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, dann ist

$$w = \frac{a}{a+b} \qquad w' = \frac{b}{a+b}$$

Es ergeben sich für die 4 Fälle nach Formel 4 folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$W_1 = w \cdot w = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

$$W_2 = w \cdot w' = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b}$$

$$W_3 = w' \cdot w = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b}$$

$$W_4 = w' \cdot w' = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

Diese vier Fälle sind aber die einzigen, die eintreten können, also muss einer dieser Fälle auch eintreten, daher muss nach Formel 2'

$$1 = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

sein, was in der That richtig ist, da

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \frac{2ab}{(a+b)^2} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2} = 1$$

ist.

Aufgabe 22. Aus einer Urne, die a weisse und b schwarze Kugeln enthält, werden zwei Züge gemacht, aber die gezogenen Kugeln werden nicht wieder zurückgelegt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man beidesmal eine weisse Kugel zieht?

Erkl. 22. Die beiden Ereignisse, der erste und zweite Zug sind von einander abhängig, indem die zuerst gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird, ist die Anzahl Kugeln für den zweiten Zug eine andere als für den ersten Zug, daher muss die Berechnung der Wahrscheinlichkeit nach Frage 8 geschehen.

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel aus der Urne ist

$$w = \frac{a}{a+b}$$

Hat man nun thatsächlich eine weisse Kugel gezogen, und nur in diesem Falle kann das zusammengesetzte Ereignis, in beiden Zügen weisse Kugeln zu ziehen, eintreten, so bleiben in der Urne nun $a - 1$ weisse Kugeln und b schwarze. Die Wahrscheinlichkeit also, im zweiten Zuge eine weisse Kugel zu ziehen, ist

$$\omega = \frac{a-1}{a-1+b}$$

Daher wird die verlangte Wahrscheinlichkeit nach Formel 5:

$$W = w \,.\, \omega = \frac{a(a-1)}{(a+b)\,(a+b-1)}$$

Aufgabe 23. Aus einer Urne, die a weisse und b schwarze Kugeln enthält, werden zwei Kugeln gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln weiss sind?

Auflösung. Diese Aufgabe ist identisch mit der Aufgabe 22. Denn das gleichzeitige Ziehen von 2 Kugeln aus der Urne kann man sich folgendermassen vorstellen: Man zieht eine Kugel und ohne die Hand aus der Urne zu geben, zieht man dann die zweite Kugel, während man die erste Kugel in der Hand behält.

Man kann aber auch die Aufgabe direkt lösen, indem man die Anzahl möglicher und günstiger Fälle berechnet.

Die $(a+b)$ Kugeln lassen sich nach Formel a in

$$\binom{a+b}{2} = \frac{(a+b)\,(a+b-1)}{1\,.\,2}$$

Paare anordnen, deren jedes aus der Urne gezogen werden kann. Günstige Fälle sind nur diejenigen, in denen das Paar aus zwei weissen Kugeln besteht. Da aber blos a weisse Kugeln vorhanden sind, so gibt es nach Formel a nur

$$\binom{a}{2} = \frac{a(a-1)}{1.2}$$

Paare, in denen zwei weisse Kugeln auftreten. Also ist nach Formel 1

$$W = \binom{a}{2} : \binom{a+b}{2}$$

oder

$$W = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

wie oben.

Aufgabe 24. Eine Urne enthält a weisse, b schwarze Kugeln. Es werden k-Züge hintereinander ausgeführt, dabei aber die gezogenen Kugeln nicht wieder zurückgelegt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den k-Zügen lauter weisse Kugeln erscheinen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel beim ersten Zug ist

$$w_1 = \frac{a}{a+b}$$

Da die Kugel nicht zurückgelegt wird, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel beim zweiten Zug

$$\omega_2 = \frac{a-1}{a-1+b}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel beim dritten Zug ist also, da nur $a-2$ weisse Kugeln vorhanden sind

$$\omega_3 = \frac{a-2}{a-2+b}$$

u. s. w. bis die Wahrscheinlichkeit, dass im k^{ten} Zug eine weisse Kugel erscheint

$$\omega_k = \frac{a-k+1}{a-k+1+b}$$

sich ergibt.

Daher wird nach Formel 5' die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = w_1 \,.\, \omega_2 \,.\, \omega_3 \ldots \omega_k$$

$$W = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(a-k+1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-k+1)}$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch

$k! = 1 . 2 \cdot 3 \ldots k$, so ergibt sich zufolge der Formel a:

$$W = \frac{\binom{a}{k}}{\binom{a+b}{k}}$$

Anmerkung 9. Auch in dem Falle der vorstehenden Aufgabe kann man sich die k aufeinander folgenden Züge so gemacht denken, dass man die Hand in der Urne lässt und jede gezogene Kugel in der Hand behält, so dass der Effekt derselbe ist, als ob man k-Kugeln auf einmal gezogen hätte. In der That ergibt sich auch derselbe Wert von W, wenn man die Wahrscheinlichkeit verlangt, dass unter k gezogenen Kugeln k weisse sind. Denn die Anordnung der $(a+\mathrm{b})$ Kugeln in Gruppen zu k lässt sich nach Formel a) auf $\binom{a+b}{k}$ Arten leisten und die der a weissen auf $\binom{a}{k}$. Diese letzteren sind die allein günstigen, daher wird

$$W = \frac{\binom{a}{k}}{\binom{a+b}{k}}$$

wie oben sich ergeben.

Aufgabe 25. Eine Urne enthält a weisse, b schwarze Kugeln, man macht $n = k + l$ Züge, legt aber die gezogenen Kugeln nicht zurück, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den k ersten Zügen weisse, in den l letzten schwarze Kugeln erscheinen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den ersten k-Zügen weisse Kugeln erscheinen, ergibt sich nach Aufgabe 24:

$$w = \frac{a(a-1) \ldots\ldots (a-k+1)}{(a+b)(a+b-1) \ldots (a+b-k+1)}$$

Sind diese k weissen Kugeln herausgezogen, so verbleiben in der Urne noch $(a+b-k)$ Kugeln, unter denen b schwarze sind. Die Wahrscheinlichkeit also nun, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist daher

$$w_1 = \frac{b}{a+b-k}$$

Ist diese schwarze Kugel gezogen, so bleiben nur mehr $b-1$ schwarze und $a-k$ weisse Kugeln in der Urne, also ist die Wahrscheinlichkeit wieder eine schwarze zu ziehen:

$$\omega_2 = \frac{b-1}{a+b-k-1}$$

u. s. w. bis

$$\omega_l = \frac{b-l+1}{a+b-k-l+1}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ist, im l^{ten} Zuge eine schwarze Kugel zu erfassen. Also ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von schwarzen Kugeln in den l letzten Zügen nach Formel 5'

$$\omega = \frac{b(b-1) \ldots\ldots (b-l+1)}{(a+b-k)(a+b-k-1) \ldots (a+b-k-l+1)}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also nach Formel 5:

$$W = \frac{a(a-1)\ldots.(a-k+1) \,.\, b(b-1)\ldots.(b-l+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-k+1)\,.\,(a+b-k)(a+b-k-1)\ldots(a+b-k-l+1)}$$

was man auch in der Form schreiben kann:

$$W = \frac{k!\, l!\, \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{l}}{(k+l)!\, \binom{a+b}{k+l}}$$

Anmerkung 10. Will man auch in diesem Falle die $n = k + l$ Züge ersetzen durch einen Zug von n-Kugeln, so muss man Folgendes beachten. Die Anzahl möglicher Fälle ist die Anzahl Kombinationen der $(a + b)$ Kugel zur n^{ten} Klasse, d. h. nach Formel **a** ist $m = \binom{a+b}{n}$. Ein günstiger Fall im Sinne der Aufgabe wird nur dann eintreten, wenn man zuerst k weisse und dann l schwarze Kugeln zieht. Greift man aber blos aus der Urne k weisse und l schwarze Kugeln auf einmal heraus, so weiss man nicht, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen wurden. Jede Anordnung der k weissen und l schwarzen Kugeln ist gleich zulässig, aber nur eine, in der zuerst k weisse und dann l schwarze erscheinen entspricht der Aufgabe. Ist also P'_{k+l} die Anzahl Permutationen von $k + l$ Elementen, von denen je k und l einander gleich sind, und A die Anzahl der Zusammenstellungen von k weissen und l schwarzer Kugeln, so ist die Anzahl günstiger Fälle für unsere Aufgabe $g = \frac{A}{P'_{k+l}}$

Was nun die Anzahl A Zusammenstellungen von k weissen und l schwarzen Kugeln anbelangt, so gibt jede der $\binom{a}{k}$ Anordnungen der a weissen Kugeln zu k, mit jeder der $\binom{b}{l}$ Anordnung der b schwarzen Kugeln zu l eine Anordnung der verlangten Art, also ist

$$A = \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{l}$$

Mithin wird nach Formel 1

$$W = \frac{g}{m} = \frac{\binom{a}{k} \cdot \binom{b}{l}}{P'_{k+l} \binom{a+b}{k+l}}$$

Vergleicht man dies mit dem oben gefundenen Werte, so ergibt sich

$$\textbf{Formel d:} \; \ldots\ldots. \quad P'_{k+l} = \frac{(k+l)!}{k!\, l!}$$

wodurch die Anzahl Permutationen von $k + l$ Elementen, von denen je k und l unter einander gleich sind, bestimmt wird.

Aufgabe 26. In einer Urne hat man a weisse, b rote und c schwarze Kugeln. Man macht $k + l + n$ Züge, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den k ersten Zügen lauter weisse, in den l folgenden Zügen lauter rote und in den n letzten Zügen lauter schwarze Kugeln erscheinen, wobei die Kugeln nicht wieder zurückgelegt werden?

Auflösung. Zufolge der Aufgabe 25 wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den

$k+l$ ersten Zügen zuerst k weisse und dann l rote Kugeln erscheinen

$$w = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)\,.\,b(b-1)\ldots(b-l+1)}{(a+b+c)\ldots(a+b+c-k+1)(a+b+c-k)\ldots(a+b+c-k-l+1)}$$

sein. Nun sind in der Urne $a-k$ weisse, $b-l$ rote und c schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit jetzt eine schwarze Kugel zu ziehen ist also

$$w_1 = \frac{c}{a+b+c-k-l}$$

Die Wahrscheinlichkeit im nächsten Zug wieder eine schwarze zu ziehen, ist

$$\omega_2 = \frac{c-1}{a+b+c-1-k-l}$$

u. s. w. bis

$$\omega_n = \frac{c-n+1}{a+b+c-n+1-k-l}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den n^{ten} Zug ist, dass in diesem eine schwarze Kugel erscheint. Die Wahrscheinlichkeit also, dass in den n letzten Zügen lauter schwarze Kugeln erscheinen, ist also

$$\omega = \frac{c(c-1)\ldots\ldots(c-n+1)}{(a+b+c-k-l(a+b+c-k-l-1)\ldots(a+b+c-k-l-n+1)}$$

und mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$= \frac{a(a-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(a-k+1)\,.\,b(b-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(b-l+1)\,.\,c(c-1)\,\ldots\ldots\,(c-n+1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)\ldots(a+b+c-k+1)(a+b+c-k)(a+b+c-k-1)\ldots(a+b+c-k-l+1)\,.\,(a+b+c-k-l)(a+b+c-k-l-1)\,..\,(a+b+c-k-l-n+1)}$$

was man auch in der Form schreiben kann:

$$\frac{k!\;l!\;n!\binom{a}{k}\cdot\binom{b}{l}\cdot\binom{c}{n}}{(k+l+n)!\binom{a+b+c}{k+l+n}}$$

Anmerkung 11. Will man auch hier statt der $k+l+n$ Züge nur einen Zug von $k+l+n$ Kugeln machen, so müssen dieselben Überlegungen, wie in der Anmerkung 10, Platz greifen. Ist A die Anzahl Kombinationen, welche k weisse, l rote und n schwarze Kugeln enthalten, so wird bei dem Herausgreifen einer solchen Kombination es unentschieden sein, in welcher Reihenfolge die verschiedenfärbigen Kugeln gezogen wurden. Ist also P'_{k+l+n} die Anzahl Permutationen von $k+l+n$ Elementen, von denen je k, l, n einander gleich sind, so wird von den P'_{k+l+n} Möglichkeiten, in denen die Aufeinanderfolge der verschiedenfärbigen Kugeln stattfinden konnte, nur eine der in der Aufgabe gestellten Bedingung genügen. Es sind also blos

$$g = \frac{A}{P'_{k+l+n}}$$

günstige Fälle.

Da jede der $\binom{a}{k}$ Kombinationen der a weissen Kugeln zu k, mit jeder der $\binom{b}{l}$ Kom-

binationen der b roten zu l und $\binom{c}{n}$ Kombinationen der c weissen zu n eine Kombination von $k+l+n$ Kugeln der verlangten Art gibt, so ist

$$A = \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{l} \cdot \binom{c}{n}.$$

Die Anzahl möglicher Fälle ist offenbar

$$m = \binom{a+b+c}{k+l+n}$$

Daher ist nach Formel 1:

$$W = \frac{\binom{a}{k} \cdot \binom{b}{l} \cdot \binom{c}{n}}{P'_{k+l+n} \binom{a+b+c}{k+l+n}}$$

und mithin ergibt sich durch Vergleichung beider Werte:

$$\textbf{Formel d}': \ldots\ldots \; P'_{k+l+n} = \frac{(k+l+n)!}{k!\; l!\; n!}$$

als die Anzahl der Permutationen von $k+l+n$ Elementen, von denen je k, l, n untereinander gleich sind.

Durch eine ganz analoge Schlussweise ergibt sich die Anzahl $P'_{k+l+n\ldots+r}$ der Permutationen von $k+l+n \ldots +r$ Elementen, von denen je k, l, $n \ldots r$ untereinander gleich sind:

$$\textbf{Formel d}'': \quad P'_{k+l+n+\ldots+r} = \frac{(k+l+n+\ldots+r)!}{k!\; l!\; n! \ldots r!}$$

Aufgabe 27. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für den Vorhandspieler im Piquetspiel unter seinen 12 Karten die 4 Ass zu besitzen?

Erkl. 28. Das Piquetspiel enthält 32 Karten, die aus 4 Farben bestehen. Jede Farbe enthält: Ass, König, Dame, Caval, Bube und 3 Skartins. Jeder der beiden Spieler erhält 12 Karten, während zwei Päckchen, eines zu 5, eines zu 3 Karten auf den Tisch als Talon gelegt wird. Der Kartengebende nimmt dann das Päckchen von 3 Karten auf, der andere Spieler, der als Vorhandspieler bezeichnet wird, nimmt das Päckchen von 5 Karten.

Auflösung. Die Anzahl möglicher Fälle ist die Zahl, welche angibt wie oft man die **32** Karten in Gruppen von **12, 12, 5, 3** teilen kann. Diese Zahl ist aber gleich der Anzahl Permutationen von **32** Elementen, von denen je **12, 12, 5, 3** einander gleich sind, d. h. es ist also nach Formel d'':

$$m = \frac{32!}{12!\; 12!\; 5!\; 3!}$$

Die Fälle, in welchen der Vorhandspieler **4** Ass hat, sind dann die, in welchen die **28** übrigen Karten so verteilt werden, dass der Vorhandspieler blos **8** erhält, während der andere **12** hat und im Talon **5** resp. **3** liegen. Daher wird

$$g = \frac{28!}{8!\; 12!\; 5!\; 3!}$$

und mithin ergibt sich

$$w = \frac{g}{m} = \frac{9.10.11.12}{29.30.31.32}$$
$$= \frac{99}{7192}$$
$$= 0{,}013765$$

Aufgabe 28. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für den Kartengebenden, dass er in seinem Talon ein Ass findet, wenn er noch keines hat?

Auflösung. Da der Spieler 12 Karten besitzt, so lassen sich die 20 übrigen noch in

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

Arten zu 3 anordnen, deren jede Anordnung ein Talon für den Kartengebenden sei. Um nun die Wahrscheinlichkeit w zu berechnen, dass im Talon ein Ass sich vorfindet, haben wir die günstige Fälle abzuzählen. Diese sind, dass im Talon 1, 2, 3 Ass vorhanden sind. Wir berechnen aber einfacher w' die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass im Talon kein Ass ist. Nehmen wir nämlich aus den 20 Karten noch die 4 Ass weg, so bleiben 16 Karten, die kein Ass enthalten und die

$$y' = \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560$$

Anordnungen zu 3 geben, welche Talons dann kein Ass enthalten. Daher ist

$$w' = \frac{560}{1140} = \frac{28}{57}$$

und mithin

$$w = 1 - w' = \frac{580}{1140} = \frac{29}{57}$$

Aufgabe 29. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für den Vorhandspieler im Talon 2 Ass zu finden, wenn er noch kein Ass hat?

Auflösung. Die 20 noch übrigen Karten lassen sich

$$\binom{20}{5} - \text{mal}$$

zu einem Talon von 5 Blättern anordnen. Dies ist also die Anzahl möglicher Fälle. Günstige Fälle werden sein

1. wenn 2 der 4 Ass mit 3 der übrigen 16 Karten oder
2. wenn 3 der 4 Ass mit 2 der 16 übrigen Karten oder endlich, wenn
3. die 4 Ass und eine der 16 Karten im Talon liegen.

1. Die Anzahl der Fälle wo 2 Ass mit 3 übrigen Karten im Talon liegen ist:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{3}$$

denn jede Kombination der 4 Ass zu zweien mit einer Terne aus den 16 übrigen Blättern gibt einen solchen Fall.

2. Die Anzahl der Fälle, dass 3 Ass und 2 der übrigen Karten im Talon liegen, ist:

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{16}{2}$$

3. Die Anzahl der Fälle, dass die 4 Ass mit einer der 16 Karten den Talon bilden, ist:

$$\binom{4}{4} \cdot \binom{16}{1}$$

Die Anzahl aller günstigen Fälle ist also:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{16}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{16}{1}$$

$$= \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{16.15.14}{1.2.3} + 4 \cdot \frac{16.15}{1.2} + 4.16$$

$$= 3904$$

Daher ist

$$w = \frac{3904.2.3.4.5}{20.19.18.17.16}$$

$$w = \frac{244}{969} = 0{,}2518$$

Aufgabe 30. Eine Urne U_1 enthält 5 weisse, 7 rote und 9 schwarze Kugeln, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass, wenn 6 Kugeln aus dieser Urne gezogen werden, darunter 1 weisse, 2 rote und 3 schwarze sich befinden?

Auflösung. Die Anzahl möglicher Fälle ist offenbar

$$m = \binom{21}{6}$$

Günstig sind die Fälle, in welchen 1 der 5 weissen Kugeln mit 2 der 7 roten und 3 der 9 schwarzen zusammenkommt, was also

$$g = \binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{9}{3}$$

günstige Fälle gibt. Daher ist nach Formel 1

$$w = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{21}{6}}$$

$$= \frac{5.7.6.9.8.7.1.2.3.4.5.6}{21.20.19.18.17.16.1.2.1.2.3}$$

$$w = \frac{105}{646} = 0{,}1626$$

Aufgabe 31. Eine Urne U_1 enthält 5 weisse, 7 rote und 9 schwarze Kugeln, es werden 10 Kugeln gezogen und in eine zweite Urne U_2 geworfen, aus der man dann 6 Kugeln zieht, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kugeln 1 weisse, 2 rote und 3 schwarze sind?

Auflösung. Für das Ziehen der 10 Kugeln ergeben sich

$$m = \binom{21}{10}$$

Möglichkeiten.

Damit ein günstiger Fall für das Ziehen aus U_2 überhaupt eintreten kann, müssen sich unter den 10 Kugeln befinden wenigstens 1 weisse, 2 rote und 3 schwarze. Da dies auf 15 verschiedene Arten, wie die nachfolgende Tabelle lehrt, geschehen kann, so kann das Ereignis aus U_2 die bestimmtfarbigen 6 Kugeln zu ziehen auf 15 verschiedene Arten eintreten. Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist also die Summe der 15 Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Fälle.

Nehmen wir den ersten Fall und bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit für diesen mit w_1. Derselbe besteht darin, dass aus U_1 gezogen werden 1 weisse, 2 rote und daher 7 schwarze Kugeln. Hiefür ist die Wahrscheinlichkeit nach Aufgabe 30 zu bestimmen und sie ergibt sich gleich

$$\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{9}{7}}{m}$$

Wirft man nun diese 10 Kugeln in die Urne U_2 und zieht 6 heraus, so kann dies auf

$$q = \binom{10}{6}$$

Fälle geschehen, unter denen aber nach Aufgabe 30 nur

$$\gamma = \binom{1}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{7}{3}$$

günstige sind, nämlich, dass 1 weisse, 2 rote, 3 schwarze Kugeln auftreten. Die Wahrscheinlichkeit, dann aus U_2 die Kugeln der verlangten Art zu ziehen ist also

$$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{7}{3}}{q}$$

Daher ist nach Formel 5

$$w = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{9}{7}}{m}\cdot\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{7}{3}}{q}$$

In der folgenden Tabelle sind nun die 15 möglichen Fälle angegeben. In derselben Zeile steht die Anzahl Kombinationen der Kugeln von U_1 in der verlangten Weise zu 10 in der Kolumne, die mit g überschrieben ist, sodann befinden sich in der mit γ überschriebenen Spalte die Anzahl Kombinationen, welche

die 10 Kugeln in U_2 geben, so dass 1 weisse, 2 rote und 3 schwarze auftreten. Die letzte Kolumne enthält die Produkte $g \cdot \gamma$.

	weisse	rote	schwarze	g	γ	$g \cdot \gamma$
	Kugeln					
1)	1	2	7	$\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{9}{7}$	$\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{7}{3}$	21.20.315
2)	1	3	6	$\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{9}{6}$	$\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{6}{3}$	21.20.2100
3)	1	4	5	$\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{9}{5}$	$\binom{1}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{3}$	21.20.3150
4)	1	5	4	$\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{5}\cdot\binom{9}{4}$	$\binom{1}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{3}$	21.20.1260
5)	1	6	3	$\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{6}\cdot\binom{9}{3}$	$\binom{1}{1}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{3}{3}$	21.20.105
6)	2	2	6	$\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{9}{6}$	$\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{6}{3}$	21.20.1680
7)	2	3	5	$\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{9}{5}$	$\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{3}$	21.20.6300
8)	2	4	4	$\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{9}{4}$	$\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}$	21.20.5040
9)	2	5	3	$\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{5}\cdot\binom{9}{3}$	$\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{3}$	21.20.120
10)	3	2	5	$\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{9}{5}$	$\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{5}{3}$	21.20.1890
11)	3	3	4	$\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{9}{4}$	$\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{3}$	21.20.3780
12)	3	4	3	$\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{9}{3}$	$\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{3}$	21.20.1260
13)	4	2	4	$\binom{5}{4}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{9}{4}$	$\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{3}$	21.20.504
14)	4	3	3	$\binom{5}{4}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{9}{3}$	$\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{3}$	21.20.420
15)	5	2	3	$\binom{5}{5}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{9}{3}$	$\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{3}$	21.20.105
					Die Summe ist	21.20.28029

und daher ist

$$w = \frac{21 \, . \, 20 \, . \, 28029}{m \, . \, q}$$

$$= \frac{28029}{3 \, . \, 19 \, . \, 17 \, . \, 14 \, . \, 13}$$

$$w = \frac{9343}{58786} = 0{,}1589$$

Aufgabe 32. Zwei Personen A und B spielen miteinander. Beide haben gleiche Wahrscheinlichkeit einen Stich zu gewinnen. A hat nur noch einen Stich zu machen, um zu gewinnen, B braucht deren zwei. Welches sind die Wahrscheinlichkeiten für A resp. B, das Spiel zu gewinnen?

Auflösung. Da beide Spieler gleiche Wahrscheinlichkeit haben, den nächsten Stich zu gewinnen, so ist die Wahrscheinlichkeit jedes derselben den Stich zu gewinnen

$$w = \frac{1}{2},$$

die dann auch gleich ist der Wahrscheinlichkeit für jeden der Spieler, den Stich nicht zu gewinnen.

Nun können 2 Fälle eintreten, in denen A gewinnt:

1. A gewinnt den ersten Stich oder
2. A verliert den ersten Stich, gewinnt aber den zweiten.

Die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall ist

$$w_1 = \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Fall ist zusammengesetzt aus der Wahrscheinlichkeit, dass A den ersten Stich verliert, die $= \frac{1}{2}$ ist und aus der Wahrscheinlichkeit, dass A den zweiten Stich gewinnt, die auch $= \frac{1}{2}$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit nach Formel 5

$$w_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

und mithin nach Formel 3 die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass B das Spiel gewinnt, ist zusammengesetzt aus der Wahrscheinlichkeit, dass A den ersten Stich verliert und B den zweiten Stich gewinnt, so dass

$$w' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ist.

Da jedenfalls eins eintreten muss, dass nämlich A oder B gewinnt, so muss

$$w + w' = 1$$

sein, was auch stattfindet.

Aufgabe 33. Eine Urne enthält 2 weisse und 3 schwarze Kugeln, welches ist die Wahrscheinlichkeit W, aus derselben in vier aufeinanderfolgenden Zügen 1 weisse und 3 schwarze Kugeln zu ziehen? Die gezogene Kugel wird wieder in die Urne zurückgelegt.

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Zuge aus der Urne, eine weisse Kugel zu ziehen, ist

$$w = \frac{2}{5}$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist

$$w' = \frac{3}{5}$$

Das zusammengesetzte Ereignis in 4 Zügen 1 weisse und 3 schwarze Kugeln zu ziehen, kann auf folgende 6 Arten eintreten:

1) Im 1ten Zug erscheint eine weisse Kugel, in den 3 folgenden erscheinen 3 schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist nach Formel 4:

$$w \,.\, w' \,.\, w' \,.\, w' = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

2) Im 1ten Zug erscheint eine schwarze Kugel, im 2ten Zug eine weisse und dann erscheinen 2 schwarze. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$w' \,.\, w \,.\, w' \,.\, w' = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

3) Im 1ten u. 2ten Zuge erscheint eine schwarze, im 3ten eine weisse und im letzten wieder eine schwarze. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$w' \,.\, w' \,.\, w \,.\, w' = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

4. Im 1ten, 2ten und 3ten Zuge erscheinen schwarze Kugeln und im letzten Zuge erscheint die weisse Kugel. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$w' \,.\, w' \,.\, w' \,.\, w = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \frac{2}{5}$$

Da irgend eines dieser vier Ereignisse eintreten kann, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach Formel 3, die Summe der vier Wahrscheinlichkeiten, d. h. es ist:

$$W = 4 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}3456$$

Anmerkung 12. Dieses Beispiel gehört schon zu den Aufgaben über wiederholte Versuche, die im II. Teil eingehender behandelt werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann ... Buchhandlung bezogen werden.

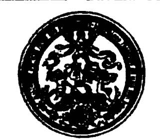
H... :heinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

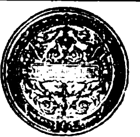
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

793. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Erster Teil.
Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.
Forts. v. Heft 792. — Seite 49—64.
Mit 3 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

—·etzung v. Heft 792. Seite 49—64. — Mit 3 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1890.

·rlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht ve[illegible] mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen [illegible] zweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verlei[illegible] somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktisch[illegible] gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe [illegible] verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt [illegible] Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird de[illegible] thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagsha[illegible]**

D. Über die relative Wahrscheinlichkeit.

(Vergleiche hiezu die Anmerkung 2.)

Frage 10. Wie berechnet man die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses?

Antwort. Hat man k Ereignisse E_1, $E_2 \ldots . E_k$, denen die Wahrscheinlichkeiten w_1, $w_2 \ldots . w_k$ zukommen, so berechnet man die relative Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 durch die

Formel 6: $$p = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + \ldots . + w_k}$$

Frage 11. Was versteht man unter dem wahrscheinlichsten Ereignis mehrerer Ereignisse?

Antwort. Das wahrscheinlichste Ereignis unter den Ereignissen E_1, $E_2 \ldots . E_k$ heisst dasjenige, dessen relative Wahrscheinlichkeit die grösste ist. Da alle relativen Wahrscheinlichkeiten denselben Nenner haben, so heisst dasjenige Ereignis auch das wahrscheinlichste, dessen absolute Wahrscheinlichkeit die grösste ist.

Gelöste Aufgaben.

(Vergl. Formel 6.)

Aufgabe 84. Es sind k-Urnen U_1, $U_2 \ldots U_i \ldots U_k$ aufgestellt, in denen allen je m Kugeln vorhanden sind, unter welchen sich resp. a_1, $a_2 \ldots a_i \ldots a_k$ weisse Kugeln befinden. Die Wahrscheinlichkeit, dass man aus der Urne U_1, $U_2 \ldots U_i \ldots U_k$ einen Zug macht, ist p_1, $p_2 \ldots p_i \ldots p_k$, welches ist die relative Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel aus der Urne U_i zu ziehen?

Auflösung. Da die Urne U_1 a_1 weisse Kugeln enthält und $m - a_1$ andere, so ist die absolute Wahrscheinlichkeit, wenn aus der Urne U_1 gezogen wird, aus ihr eine weisse Kugel zu ziehen

$$= \frac{a_1}{m}$$

Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit in die Urne U_1 zu greifen, p_1 also ist die absolute Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses in die Urne U_1 zu greifen und daraus eine weisse Kugel zu ziehen

$$w_1 = p_1 \frac{a_1}{m}$$

Analog findet man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Züge von weissen Kugeln aus den Urnen $U_2 \ldots U_i \ldots U_k$ gleich

$$w_2 = p_2 \frac{a_2}{m}$$
$$\vdots$$
$$w_i = p_i \frac{a_i}{m}$$
$$\vdots$$
$$w_k = p_k \frac{a_k}{m}$$

Daher ist die relative Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weissen Kugel aus der Urne U_i:

$$W_i = \frac{p_i\, a_i}{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_k a_k}$$

wenn man Zähler und Nenner mit m multipliziert.

Aufgabe 35. In einer Urne sind 2 weisse und 3 schwarze Kugeln, man macht 5 Züge hintereinander, wobei nach jedem Zug die Kugel wieder zurückgelegt wird. Welches ist die wahrscheinlichste Anzahl von weissen und schwarzen Kugeln, die in 5 Zügen zum Vorschein kommen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel ist $\frac{2}{5}$, die für das Ziehen einer schwarzen ist $\frac{3}{5}$. Diese Wahrscheinlichkeiten bleiben bei jedem der 5 Züge dieselben. Nun können folgende Fälle eintreten:

1. In allen 5 Zügen erscheinen weisse Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist nach Aufgabe 33, die auch für alle folgende Fälle massgebend ist:

$$w_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{5^5}$$

2. Es werden 4 weisse und 1 schwarze Kugel gezogen. Die Wahrscheinlichkeit ist:

$$w_2 = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{240}{5^5}$$

3. Es werden 3 weisse und 2 schwarze Kugeln gezogen. Die Wahrscheinlichkeit ist:

$$w_3 = 10 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{720}{5^5}$$

4. Es werden 2 weisse und 3 schwarze Kugeln gezogen. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$w_4 = 10 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{1080}{5^5}$$

5. Es werden 1 weisse und 4 schwarze Kugeln gezogen. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$w_5 = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{810}{5^5}$$

6) Es werden lauter schwarze Kugeln gezogen. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$w_6 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{5^5}$$

Man erkennt nun, dass der Fall 4, in welchem 2 weisse und 3 schwarze Kugeln erscheinen, der wahrscheinlichste ist, indem ihm die grösste alsolute, also auch relative Wahrscheinlichkeit zukommt.

Anmerkung 13. Es ist nicht Zufall in diesem Beispiel, dass der Fall der wahrscheinlichste ist, in dem die gezogenen Kugeln ihrer Farbe nach dasselbe Verhältnis (2 und 3) zeigen, in welchem sie auch in der Urne vorhanden sind. Wir werden später sehen, dass dieses ein allgemeines sehr wichtiges Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist.

Ungelöste Aufgaben.

(zu den Abschnitten B, C, D des I. Teiles).

Aufgabe 36. Welches ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Spiele von 32 Karten eine Figur zu ziehen?

Andeutung. Vergleiche die Erklärung 3 und Aufgabe 1.

Aufgabe 37. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, die 50 weisse und 80 schwarze Kugeln enthält, eine weisse Kugel zu ziehen?

Andeutung. Es ist die Formel 1 anzuwenden.

Aufgabe 38. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, die 20 weisse, 30 rote, 40 grüne und 50 schwarze Kugeln enthält

1. eine weisse Kugel,
2. eine rote Kugel,
3. eine grüne Kugel,
4. eine schwarze Kugel

zu ziehen?

Aufgabe 39. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Tarokspiel von 54 Karten

1. einen König,
2. einen Tarok

zu ziehen?

Andeutung. Vergleiche die Erklärung 9.

Aufgabe 40. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln die Summe 9 zu werfen?

Andeutung. Die Lösung ist analog der Aufgabe 6.

Aufgabe 41. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln die Summe 6 zu werfen?

Aufgabe 42. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln die Summe 5 zu werfen?

Andeutung. Mit 3 Würfeln kann man überhaupt $6^3 = 216$ verschiedene Würfe machen und es ist abzuzählen, wie viele darunter sind, die die Summe 5 ergeben. Man hat also zu setzen:

$$\begin{aligned} 5 &= 1+1+3 = 1+2+2 \\ &= 1+3+1 = 2+1+2 \\ &= 2+2+1 = 3+1+1 \end{aligned}$$

und erhält 6 günstige Fälle.

Aufgabe 43. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln die Summe 8 zu werfen?

Aufgabe 44. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln die Summe 7 zu werfen?

Aufgabe 45. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln die Summe 14 zu werfen?

Andeutung. Man vergleiche hiezu die Lösung der Aufgabe 10, so erkennt man, dass die Aufgaben 44 und 45 dieselbe Wahrscheinlichkeit ergeben müssen.

Aufgabe 46. Schreibe die Kombinationen 2., 3., 4., 5. Klasse der 5 Elemente *abcde* hin?

Andeutung. Vergleiche hiezu die Erklärung 7.

Aufgabe 47. In einer Urne sind 8 weisse und 12 schwarze Kugeln, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man zwei weisse Kugeln auf einmal herauszieht?

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 22.

Aufgabe 48. Jemand kauft aufs Geradwohl einen Parterresitz im Theater. Das Parterre enthält 20 Reihen und jede Reihe hat 40 Sitze rechts, 40 Sitze links. In der Mitte ist kein Durchgang. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Käufer einen Ecksitz erhalten hat?

Andeutung. Vergleiche Formel 1.

Aufgabe 49. Eine Gesellschaft von 40 Personen kauft die 40 Plätze einer Reihe des Parterres im Theater. Dieselbe setzt sich irgendwie auf die Plätze, welches ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Person den Ecksitz einzunehmen?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 7 und Erklärung 8.

Aufgabe 50. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, aus den 90 Nummern der Lotterie zwei herauszuziehen, deren Summe unter 91 ist?

Andeutung. Die Aufgabe ist analog zu lösen, wie die Aufgabe 10. Man braucht nur die Nummern 1, 2 .... 45 sich mit den Nummern 90, 89 .... 46 zu Paaren verbunden denken, so dass die Summe eines Paares 91 ist. Zieht man eine Nummer jedes Paares, so ist die Summe der 4 Nummern 182, sind also die gezogenen Nummern mit der Summe unter 91, so sind die zwei anderen über 91. Nimmt man also 45 Kombinationen weg, die gerade 91 ausmachen, so ist die Anzahl Kombinationen q, welche noch eine Summe unter 91 geben, gleich der, welche eine Summe über 91 geben. Es ist also

$${}_{90}C_2 - 45 = 2q$$

woraus sich g bestimmt. Wegen ${}_{90}C_2$ vergleiche die Erklärung 7.

Man kann die Aufgabe auch analog wie die Aufgabe 14 lösen.

Aufgabe 51. Eine Lotterie enthält k Nummern, in jeder Ziehung werden m davon gezogen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass n bestimmte Nummern herauskommen?

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 7.

Aufgabe 52. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, für den Aufnehmer im Tarokspiel eine Karte von der Troule im Talon zu kaufen, wenn er noch nichts von der Troule besitzt?

Andeutung. Vergl. Aufgabe 12 und Erkl. 9.

Aufgabe 53. Man schreibt irgend eine zweizifferige Zahl hin, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieselbe ungerade ist?

Andeutung. Da die Zahl eine von den Zahlen 10 bis 99 sein muss, so ist es leicht, die ungeraden und geraden Zahlen abzuzählen.

Aufgabe 54. Man schreibt eine zweizifferige Zahl hin, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl eine Primzahl ist?

Aufgabe 55. Auf ein Schachbrett, dessen Quadrate die Länge von 2 cm haben, wird eine Münze von dem Durchmesser 1 cm geworfen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Münze ganz auf ein Feld zu liegen kommt?

Andeutung. Die Lösung geschieht analog wie die Lösung der Aufgabe 15.

Aufgabe 56. In den Urnen U_1 und U_2 befinden sich g_1 resp. g_2 weisse und s_1 resp. s_2 schwarze Kugeln. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen:

1. je einer weissen Kugel aus beiden Urnen,
2. einer weissen aus der ersten und einer schwarzen aus der zweiten,
3. einer schwarzen aus der ersten und einer weissen aus der zweiten Urne,
4. je einer schwarzen aus beiden Urnen?

Andeutung. Die Lösung geschieht wie in Aufgabe 19.

Die Summe der vier Wahrscheinlickeiten muss 1 geben.

Aufgabe 57. Eine Urne enthält 5 weisse und 7 schwarze Kugeln, man zieht 4 Kugeln und wirft sie in eine zweite Urne, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass man aus dieser eine weisse Kugel zieht?

Andeutung. Die Lösung geschieht wie in Aufgabe 20.

Aufgabe 58. Aus einer Urne, die 5 weisse, 7 schwarze und 9 rote Kugeln enthält, werden 4 Kugeln gezogen, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 4 Kugeln weiss sind?

Andeutung. Die Lösung ist nach Aufgabe 24 zu vollführen.

Aufgabe 59. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 4 Kugeln der Aufgabe 58 drei weisse sind?

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 26 und Anmerkung 11.

Aufgabe 60. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, für den Vorhandspieler im Piquet in seinem Talon von 5 Blättern ein Ass zu finden, wenn er noch keines besitzt?

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 28 und Erklärung 23.

Aufgabe 61. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für den Kartengebenden in seinem Talon 1 Ass zu kaufen, wenn er schon 1 Ass besitzt?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 28 und Erklärung 23, sowie Aufgabe 27, wobei zu beachten ist, dass in den 20 Karten, die der Kartengebende nicht hat, nur mehr 3 Ass vorhanden sind.

Aufgabe 62. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, für den Vorhandspieler im Talon ein Ass zu kaufen, wenn er bereits 2 hat?

Aufgabe 63. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, für den Kartengebenden im Piquetspiele 2 Ass zu kaufen, wenn er bereits 1 Ass hat?

Aufgabe 64. Eine Urne enthält 7 weisse, 9 rote, 11 grüne und 13 schwarze Kugeln, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass, wenn 10 Kugeln gezogen werden unter diesen 2 weisse, 3 rote, 4 grüne und 1 schwarze Kugel ist?

Andeutung. Vergleiche die Lösung der Aufgabe 31.

Aufgabe 65. Welche Wahrscheinlichkeit hat der Vorhandspieler im Piquetspiel, in seinem Talon von 5 Blättern 1 Ass und 1 König zu finden, wenn er weder Ass noch König hat?

Andeutung. Man hat folgende 10 Fälle zu unterscheiden: Im Talon können liegen:

1)	1 Ass,	1 König	und 3	andere der 12 Karten
2)	1 „	2 Könige	„ 2	„ „ „ „
3)	1 „	3 „	„ 1	„ „ „ „
4)	1 „	4 „	„ 0	„ „ „ „
5)	2 „	1 König	„ 2	„ „ „ „
6)	2 „	2 Könige	„ 1	„ „ „ „
7)	2 „	3 „	„ 0	„ „ „ „
8)	3 „	1 König	„ 1	„ „ „ „
9)	3 „	2 Könige	„ 0	„ „ „ „
10)	4 „	1 König	„ 0	„ „ „ „

für jeden dieser Fälle ergibt sich die Anzahl Möglichkeiten leicht nach Aufgabe 29 und ihre

Summe ist die Anzahl günstiger Fälle. Man beachte, dass die Fälle

2 und 5
3 und 8
4 und 10
7 und 9

gleiche Anzahlen ergeben. Warum?

Aufgabe 66. A und B spielen miteinander. Jeder hat gleiche Wahrscheinlichkeit, einen Stich zu machen. A braucht noch 2 Stiche, um zu gewinnen, B braucht deren 3. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und welches, dass B das Spiel gewinnt?

Andeutung. Das Spiel ist höchstens in 4 Partien zu Ende. Hiebei gewinnt A das Spiel, wenn er

1) die 1. und 2. Partie gewinnt,
2) „ 1. „ 3. „ „
3) „ 1. „ 4. „ „
4) „ 2. „ 3. „ „
5) „ 2. „ 4. „ „
6) „ 3. „ 4. „ „

während er die 2 übrigen verliert. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für diese 6 Fälle geschieht wie bei der Aufgabe 32. Wird auch die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen des B so berechnet, so müssen beide Wahrscheinlichkeiten zur Summe 1 geben.

Aufgabe 67. Eine Urne enthält 3 weisse, 5 schwarze Kugeln. Es werden 5 Züge hintereinander gemacht, wobei die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt wird. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass

1. lauter weisse Kugeln gezogen werden,
2. dass 1 weisse, 4 schwarze,
3. „ 2 „ 3 „
4. „ 3 „ 2 „
5. „ 4 „ 1 „ und
6. dass lauter schwarze Kugeln gezogen werden?

Andeutung. Die Lösung geschieht für jeden der 6 Fälle auf analoge Art, wie bei der Aufgabe 33.

Da einer der 6 Fälle eintreten muss, so muss die Summe der 6 gefundenen Wahrscheinlichkeiten 1 geben.

Vergleiche hiezu auch die Aufgaben des II. Teils.

Aufgabe 68. Welche Summe hat die grösste Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln geworfen zu werden?

Andeutung. Man hat die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen für das Werfen der Summen:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Vergl. die Aufgabe 6.

Aufgabe 68a. Man wirft mit 3 Würfeln, welches ist die Summe, die die grösste Wahrscheinlichkeit aufgeworfen zu werden besitzt?

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 42.

Aufgabe 69. Eine Urne enthält 3 weisse, 2 schwarze Kugeln. Man zieht zweimal hintereinander, wobei jedesmal die Kugel zurückgelegt wird. Welche Kombination von weissen und schwarzen Kugeln, die in den 2 Zügen zum Vorschein kommen können, ist die wahrscheinlichste?

Andeutung. Man hat die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, dass in den 5 Zügen 0, 1, 2 weisse Kugeln erscheinen und dann nach Formel 6 zu verfahren. Vergleiche die Aufgabe 35.

Aufgabe 70. Eine Urne enthält 20 weisse und 30 schwarze Kugeln. Es werden 5 Kugeln auf einmal herausgezogen. Welche Kombination von weissen und schwarzen Kugeln ist die wahrscheinlichste?

Andeutung. Man hat nach Aufgabe 25 die Wahrscheinlichkeiten p zu bestimmen, dass unter den 5 Kugeln 0, 1, 2, 3, 4, 5 weisse sind und dann nach Formel 6 den grössten Wert von p auszusuchen.

II. Teil.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei wiederholten Versuchen. Das Bernoullische Theorem. Die mathematische Erwartung, Wetten, Versicherungen.

A. Über Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Versuchen.

Frage 12. Wie bestimmt man die Wahrscheinlichkeit für das wiederholte Eintreffen eines Ereignisses in bestimmter Reihenfolge bei wiederholten Versuchen, in denen das Ereignis eintreten kann?

Antwort. Sind $p_1, p_2 \ldots p_3 \ldots p_m$ die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen des Ereignisses in dem 1ten, 2ten, $3^{ten} \ldots m^{ten}$ Versuch und $q_1, q_2, q_3 \ldots q_m$ die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten und ist die Reihenfolge der Versuche gegeben, in denen das Ereignis eintreten soll, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkte der p_i für die Versuche, in denen das Ereignis eintreten soll, multipliciert mit dem Produkte der q_k, in denen das Ereignis nicht eintreten soll. Soll z. B. die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dafür, dass das Ereignis im 1ten, 3ten, 5ten u. s. w. jeden ungeraden Versuch eintritt, also bei dem 2ten, 4ten, $6^{ten} \ldots$ nicht eintritt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= p_1\, p_3\, p_5 \cdots q_2\, q_4\, q_6 \cdots$$

Der Beweis hiefür ist einfach durch die Formel 4 gegeben.

Anmerkung 14. Sind die Wahrscheinlichkeiten p_i alle einander gleich, d. h. ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses in jedem Versuche dieselbe, wo dann auch die q_k einander gleich sein müssen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei m Versuchen $m-k$-mal in bestimmter Reihenfolge erscheint; also k-mal nicht erscheint:

$$\textbf{Formel 7} \ \ldots\ w = p^{m-k} q^k$$

Frage 13. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit für das öftere Eintreffen eines Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit bei den wiederholten Versuchen dieselbe bleibt, wenn keine Rücksicht daraufgenommen wird, in welcher Reihenfolge das Ereignis bei den Versuchen eintritt?

Antwort. Ist p die konstante Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses, q die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, so ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass bei m Versuchen das Ereignis $(m-k)$-mal eintritt, also k-mal nicht eintritt, gegeben durch die

Formel 8: $$w = \binom{m}{k} p^{m-k} q^k$$

Erkl. 24. Wegen $\binom{m}{k}$ vergl. die Formel a

Frage 14. Wie beweist man die Formel 8?

Antwort. Man kann die Formel 8 auf zweierlei Art beweisen, entweder auf Grund der Formel 7 oder direkt.

1. Beweis auf Grund der Formel 7. Wir deuten das Eintreffen des Ereignisses als das Ziehen einer weissen Kugel aus einer Urne, die a weisse und b schwarze Kugeln hat, wobei die gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird. Dann ist

$$p = \frac{a}{a+b}$$

und

$$q = \frac{b}{a+b}$$

Sollen nun in bestimmter Reihenfolge bei den einzelnen Zügen $m-k$ weisse und k schwarze Kugeln erscheinen, so ist die Wahrscheinlichkeit für jede solche Reihenfolge nach Formel 7:

$$p^{m-k} q^k = \frac{a^{m-k} b^k}{(a+b)^m}$$

Da nun aber keine Rücksicht darauf genommen werden soll, in welcher Reihenfolge die weissen und schwarzen Kugeln erscheinen, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe aller Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Reihenfolgen (vergleiche hiezu die Frage 6, Formel 3').

Denkt man sich für die m gezogenen Kugeln Buchstaben hingeschrieben (etwa für jede weisse α, für jede schwarze β) in derselben Reihenfolge, in welchen die Kugeln bei den m Zügen erscheinen, so stellt jede solche Anschreibung eine Per-

mutation der $m-k$ Buchstaben α und k Buchstaben β dar, und jede solche beliebig hingeschriebene Permutation kann die Ordnung angeben, in welcher die weissen und schwarzen Kugeln bei den Zügen zu erscheinen haben. Es wird also soviel verschiedene Reihenfolgen geben, als es Permutationen der $m-k$ Buchstaben α und k Buchstaben β gibt. Diese Zahl ist nach Formel d

$$= \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

$$= \binom{m}{k}$$

Da nun für jede Reihenfolge die Wahrscheinlichkeit

$$p^{m-k}\,q^k$$

ist, so wird die verlangte Wahrscheinlichkeit nach Formel 3.

$$w = \binom{m}{k} p^{m-k}\,q^k$$

sein, wodurch die Formel 8 bewiesen ist.

Erkl. 25. Der nebenstehende Beweis wird von m auf $m+1$ geführt. Man zeigt, dass die Formel richtig ist für $m+1$, wenn ihre Richtigkeit für m zugegeben wird.

2. Direkter Beweis. Wir beweisen zuerst die Giltigkeit der Formel 8 für $m=2$ und alle zulässigen k, also $k=0, 1, 2$. Nehmen dann an, dass die Formel 8 für ein beliebiges m und für alle $k \leq m$ gilt und zeigen, dass sie sodann auch für $m+1$ und $k \leq m+1$ richtig ist. Da sie für 2 bewiesen wurde, so gilt sie dann allgemein.

Wir setzen wieder p als die Wahrscheinlichkeit voraus, aus einer Urne, die a weisse und b schwarze Kugeln enthält, eine weisse Kugel zu ziehen, so dass

$$p = \frac{a}{a+b}$$

$$q = \frac{b}{a+b}$$

ist.

Wird vorerst $m=2$ angenommen, so lautet die Formel 8:

$$w = \binom{2}{k} p^{2-k}\,q^k$$

Es sind also nur die Fälle $k = 0, 1, 2$ zulässig.

1) $k = 0$, d. h. es ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass in 2 aufeinanderfolgenden Zügen weisse Kugeln erscheinen. Nach Formel 4 ist diese Wahrscheinlichkeit

$$w = p \cdot p = p^2$$

was auch die Formel 8 für $m = 2$, $k = 0$ liefert, da $\binom{2}{0} = 1$ ist.

2) $k = 1$, d. h. es ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass in den beiden Zügen 1 weisse und eine 1 schwarze erscheint. Dies kann entweder so geschehen, dass zuerst die weisse und dann die schwarze Kugel gezogen wird, wofür die Wahrscheinlichkeit $= p \,.\, q$ sich ergibt, oder dass zuerst die schwarze und dann die weisse Kugel erscheint, wofür die Wahrscheinlichkeit $= q \,.\, p$ ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen und einer schwarzen Kugel nach Formel 3

Erkl. 26. Man hat hier zuerst die Formel 4 und sodann die Formel 3 zu benutzen.

$$w = p \cdot q + q \cdot p = 2pq,$$

was auch die Formel 8 für $m = 2$, $k = 1$ ergibt.

3) $k = 2$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass beidesmal schwarze Kugeln gezogen werden, ist nach Formel 4

$$w = q^2$$

was auch Formel 8 für $m = 2$, $k = 2$ liefert, da $\binom{2}{2} = 1$ ist.

Die Formel 8 ist also für $m = 2$ und $k \leq 2$ richtig.

Wir nehmen nun an, die Formel 8 wäre für m und $k \leq m$ richtig, und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass bei $(m + 1)$ Zügen n schwarze und $m - n$ weisse Kugeln erscheinen, wobei wir $n \leq m$ voraussetzen.

Die n schwarzen Kugeln können so zum Vorschein gekommen sein, dass entweder in den m ersten Zügen n schwarze Kugeln gezogen wurden und im letzten Zuge dann eine weisse erschien oder dass in den ersten m Zügen bloss $(n - 1)$ schwarze Kugeln erschienen und im letzten Zuge noch eine schwarze Kugel gezogen wurde. Sind w_1 und w_2

die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten, so ist nach Formel 3

$$w = w_1 + w_2.$$

Bestimmung von w_1: Diese Wahrscheinlichkeit ist zusammengesetzt aus der Wahrscheinlichkeit, dass in den m ersten Zügen n schwarze Kugeln erscheinen, welche nach Formel 8 sich

$$= \binom{m}{n} p^{m-n} q^n$$

ergibt, und der Wahrscheinlichkeit p, dass im letzten Zuge eine weisse Kugel erscheint. Nach Formel 4 ist dann

$$w_1 = \binom{m}{n} p^{m-n} q^n \cdot p$$

$$= \binom{m}{n} p^{m-n+1} q^n$$

Bestimmung von w_2: Diese Wahrscheinlichkeit ist zusammengesetzt aus der Wahrscheinlichkeit, dass in den m ersten Zügen $n-1$ schwarze Kugeln erscheinen, welche nach Formel 8 sich

$$= \binom{m}{n-1} p^{m-n+1} q^{n-1}$$

ergibt, und der Wahrscheinlichkeit q, dass im letzten Zuge eine schwarze Kugel erscheint. Nach Formel 4 ist dann

$$w_2 = \binom{m}{n-1} p^{m-n+1} q^{n-1} \cdot q$$

$$= \binom{m}{n-1} p^{m-n+1} q^n$$

Daher ist

$$w = \left[\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}\right] p^{m+1-n} q^n$$

Da nach Formel a'

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\, n!} = \frac{(m-n+1) \,.\, m!}{(m-n+1)!\, n!}$$

$$\binom{m}{n-1} = \frac{m!}{(m-n+1)!\,(n-1)!} = \frac{n \quad .\, m!}{(m-n+1)!\, n!}$$

ist, so folgt

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \frac{m!}{(m-n+1)!\,n!}\,[m-n+1+n]$$

$$= \frac{(m+1)\,.\,m!}{(m+1-n)!\,n!}$$

$$= \frac{(m+1)!}{(m+1-n)!\,n!}$$

$$= \binom{m+1}{n}$$

und daher

$$w = \binom{m+1}{n}\,p^{m+1-n}\,q^n$$

welches genau die Formel 8 ist, wenn in derselben $m+1$, n an Stelle m, k gesetzt wird.

Wir haben $n \leqq m$ vorausgesetzt. Die abgeleitete Formel gilt aber auch für $n = m+1$. Denn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in $(m+1)$ Zügen lauter schwarze Kugeln erscheinen, ist nach Formel 4 berechnet $= q^{m+1}$, welchen Wert auch die oben bewiesene Formel für $n = m+1$ ergibt.

Wird also die Formel 8 als richtig vorausgesetzt für m und alle $k \leqq m$, so ist sie auch richtig für $m+1$ und alle $k \leqq m+1$. Da sie nun für $m = 2$ und $k \leqq 2$ als richtig befunden wurde, so gilt sie allgemein.

Anmerkung 15. Bei den m Zügen der Kugeln aus der Urne können folgende $m+1$ Fälle und nur diese eintreten. Es werden:

$$m,\ m-1,\ m-2\ \ldots\ldots\ 1,\ 0 \text{ weisse Kugeln}$$

gezogen. Hiefür ergeben sich nach Formel 8 die Wahrscheinlichkeiten:

$$p^m,\ \binom{m}{1}p^{m-1}q,\ \binom{m}{2}p^{m-2}q\ \ldots\ldots\ \binom{m}{m-1}p\,q^{m-1},\ q^m$$

Da nun eines dieser Ereignisse notwendig eintreten muss, so muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben. In der That ist nach dem binomischen Lehrsatze (siehe Kleyers Lehrb. der Potenzen und Wurzeln):

$$p^m + \binom{m}{1}p^{m-1}q + \binom{m}{2}p^{m-2}q + \ldots\ldots + \binom{m}{1}p\,q^{m-1} + q^m = (p+q)^m = 1_m$$

da p und q entgegengesetzte Wahrscheinlichkeiten sind (vergl. Formel 2).

Anmerkung 16. Die Gleichung

$$p^m + \binom{m}{1}p^m q + \binom{m}{2}p^{m-2}q^2 + \ldots + \binom{m}{k}p^{m-k}q^k + \ldots + \binom{m}{1}p\,q^{m-1} + q^m = 1$$

enthält $(m+1)$ Glieder, deren Summe 1 ist. Je grösser also m wird, desto kleiner muss jedes der Glieder werden. Hiebei werden die ersten und letzten Glieder viel rascher kleiner

als die mittleren ein Umstand, der später noch von besonderer Wichtigkeit wird. Um dieses Abnehmen der einzelnen Glieder gegeneinander einfach zu übersehen, kann man sich dasselbe geometrisch veranschaulichen. Denkt man sich in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem und trägt auf die Abscissen die Zahlen $k = 0, 1, 2 \ldots . m$ auf, und nimmt die Ordinaten für diese Abscissen gleich den entsprechenden Gliedern der obigen Gleichung, so erhält man durch Verbinden der erhaltenen Punkte eine Kurve, welche die Beziehung der einzelnen Glieder der obigen Gleichung für ein bestimmtes m gegeneinander zeigt. Ändert man nun m, indem man die Strecke auf der Abscissenaxe von 0 bis m konstant erhält, so dass also bei wachsendem m die Teilpunkte zusammenrücken, so erhält man eine Kurvenschar, welche die Abhängigkeit der einzelnen Glieder der obigen Gleichung von m versinnlicht.

Nehmen wir beispielsweise an, es sei $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, dann werden sich folgende Gleichungen ergeben für

$$m = 3, \quad \frac{8}{27} + \frac{12}{27} + \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = 1$$

$$m = 6, \quad \frac{64}{729} + \frac{192}{729} + \frac{240}{729} + \frac{160}{729} + \frac{160}{729} + \frac{60}{729} + \frac{12}{729} + \frac{1}{729} = 1$$

$$m = 9, \quad \frac{512}{19683} + \frac{2304}{19683} + \frac{4608}{19683} + \frac{5376}{19683} + \frac{4032}{19683} + \frac{2016}{19683} + \frac{672}{19683} + \frac{144}{19683} + \frac{18}{19683} + \frac{1}{19683} = 1$$

und dem entsprechend erhalten wir folgende drei Kurven:

Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

Hiebei ist zu bemerken, dass als Einheit der Ordinaten angenommen wurde die Länge $\frac{10}{729}$, so dass die Ordinaten

der Figur 7 sind für $k =$	0,	1,	2,	3						
	22,	[32],	16,	3						
der Figur 8 für $k =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6			
	6,	19,	[24],	16,	6,	1,	0,1			
der Figur 9 für $k =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
	2,	8,5,	17,	[19],	15,	7,	2,	0,5,	0,006,	0,001

Die grössten Ordinaten ergeben sich in Figur 7 für $k=1$, in Figur 8 für $k=2$ und in Figur 9 für $k=3$, ihre Werte sind im obigen durch eckige Klammern eingefasst. Wir bemerken, dass diese Werte von k und die zugehörigen Werte von $m-k$ der Proportion $m-k:k=p:q$ genügen; d. h. das grösste Glied in den Summen ist dasjenige, in welchem sich die Exponenten von p und q verhalten wie $p:q$.

Frage 15. Ein Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit p, bei m Versuchen kann dasselbe m, $m-1$, $m-2$, ... 2, 1, 0 mal eintreten, welche von diesen Möglichkeiten hat die grösste Wahrscheinlichkeit?

Antwort. Die grösste Wahrscheinlichkeit hat der Fall, in welchem das Ereignis $(m-k)$-mal eintritt und k-mal nicht eintritt, so dass

$$m-k:k=p:q$$

sich verhält.

Beweis. Wir setzen

$$A_i=\binom{m}{i}p^{m-i}q^i$$

dann ist A_i die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den m Versuchen das Ereignis $(m-i)$-mal eintritt und i-mal nicht eintritt. Zugleich ist A_i die relative Wahrscheinlichkeit des $(m-i)$-maligen Eintreffens. Denn die relative Wahrscheinlichkeit ist nach Formel 6 gegeben durch

$$\frac{A_i}{A_0+A_1+\ldots+A_i+\ldots+A_m}$$

und da

$$A_0+A_1+\ldots+A_i+\ldots+A_m=1$$

ist, so ist dieselbe $=A_i$.

Bilden wir den Quotienten zweier aufeinander folgenden Grössen A, so erhalten wir:

$$A_{i+1}=\binom{m}{i+1}p^{m-i-1}q^{i+1}$$

$$A_i=\binom{m}{i}p^{m-i}q^i$$

daher

$$\frac{A_{i+1}}{A_i}=\frac{\binom{m}{i+1}}{\binom{m}{i}}\cdot\frac{q}{p}$$

und da

$$\binom{m}{i+1} = \frac{m!}{(i+1)!\,(m-i-1)!}$$

$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!\,(m-i)!}$$

ist, so ist

$$\frac{\binom{m}{i+1}}{\binom{m}{i}} = \frac{m-i}{i+1}$$

Es wird daher

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{m-i}{i+1} \cdot \frac{q}{p} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

d. h. es ist

$$\left.\begin{array}{lll} A_{i+1} > A_i & \text{so lange} & \frac{m-i}{i+1} \cdot \frac{q}{p} > 1 \\ A_{i+1} < A_i & \text{„} \quad \text{„} & \frac{m-i}{i+1} \cdot \frac{q}{p} < 1 \\ A_{i+1} = A_i & \text{wenn} & \frac{m-i}{i+1} \cdot \frac{q}{p} = 1 \end{array}\right\} (2)$$

ist. Es folgt aus

$$\frac{m-i}{i+1} \cdot \frac{q}{p} \gtreqless 1$$

$$(m-i)\,q \gtreqless p\,(i+1)$$

$$m\,q - p \gtreqless i\,(p+q)$$

oder da $p + q = 1$ ist

$$i \lesseqgtr (m+1)\,q - 1$$

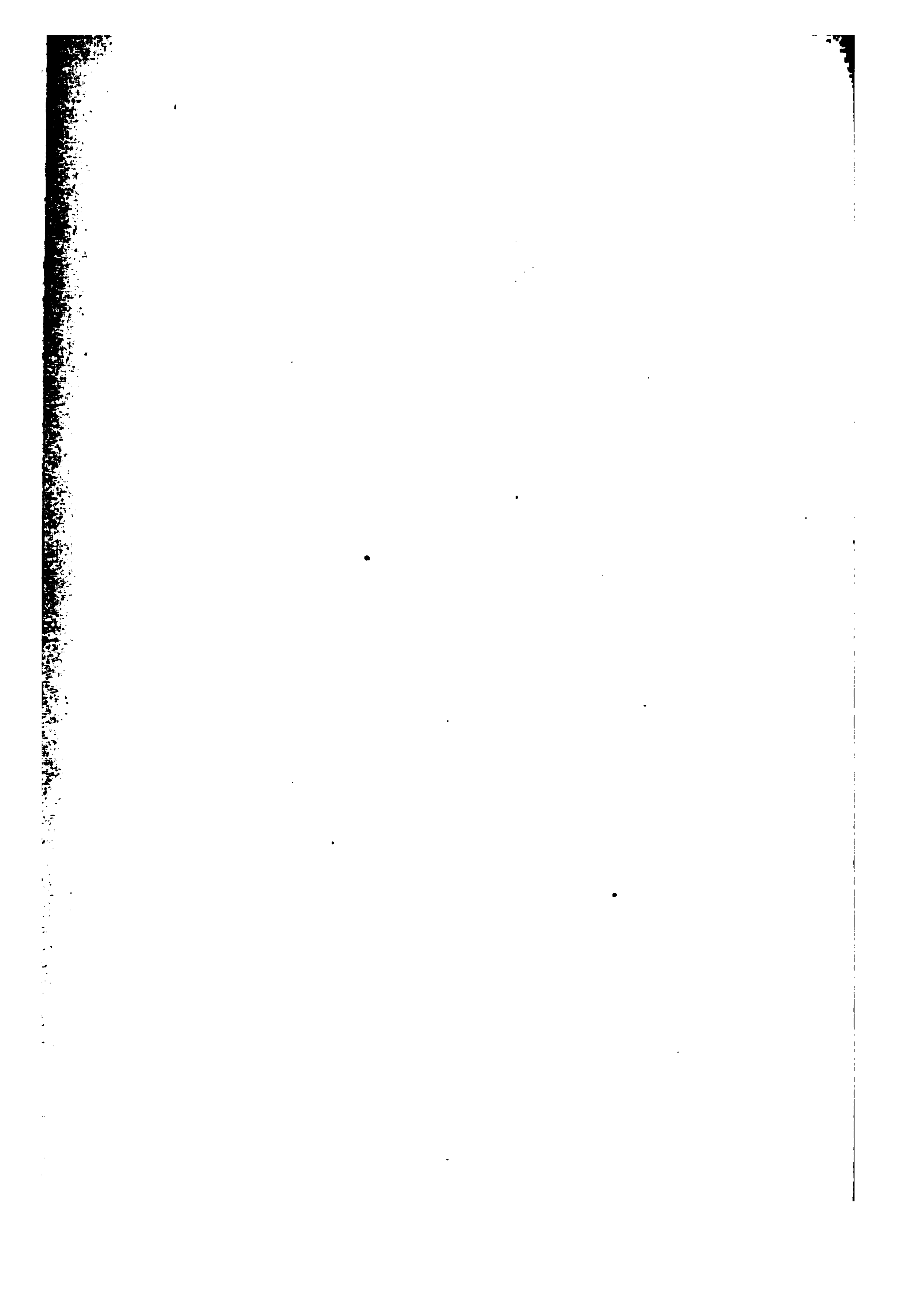
1) Ist $m\,q$ also auch $m\,p$ keine ganze Zahl, so setzen wir:

$$\begin{array}{l} \alpha = m\,p - \varepsilon \\ \beta = m\,q + \varepsilon \end{array} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wobei ε ein positiver echter Bruch sein soll, so dass α die grösste ganze in $m\,p$ enthaltene Zahl und $\beta = m\,q + 1 - (1 - \varepsilon)$ die grösste in $m\,q + 1$ enthaltene ganze Zahl sein soll. Es ist dann

$$\alpha + \beta = m\,(p+q) = m \quad \ldots \quad (4)$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

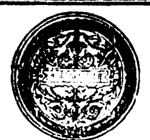


802. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Erster Teil.
Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.
Forts. v. Heft 793. — Seite 65—80.
Mit 3 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere **Analysis**, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 793. Seite 65—80. — Mit 3 Figuren.

Inhalt:

Ueber Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Versuchen. — Gelöste Aufgaben.

Stuttgart 1890.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die **Lösung** jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln **angeordnet** — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, **welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben**, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt werden können**. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand **des Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt **zunächst** den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Be**[illegible] **zweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen [illegible] somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** ge[illegible]

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische [illegible] gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der N[illegible] verbreitet. — **Wünsche, Fragen** etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfa**[illegible] **Dr. Kleyer, Frankfurt a. M.** Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledi[illegible] thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlu**[illegible]

Zu Folge der Gleichungen (3) wird

$$(m+1)\,q = m\,q + q = \beta + \varepsilon + q$$

und da q auch ein echter Bruch ist, so kann $\varepsilon + q$ höchstens 2 geben, daher ist

$$(m+1)\,q - 1 = \beta + (\varepsilon + q - 1) = \beta + \varepsilon' \quad (5)$$

wobei ε' kleiner als 1 sein muss.

Da der Index i bloss ganzzahlige Werte annimmt, so schreiben sich unsere Bedingungen (2) in der Form:

$$\left.\begin{array}{lll} A_{i+1} > A_i & \text{so lange} & i < \beta \\ A_{i+1} < A_i & \text{,,} \quad \text{,,} & i > \beta \end{array}\right\} \quad \ldots . (6)$$

d. h. es wächst A_i mit dem Index i, so lange i unterhalb β ist, es nimmt aber ab mit wachsendem i, sobald i grösser ist als β. Das grösste Glied ist daher A_β oder

$$A_\beta = \binom{m}{\beta} p^\alpha q^\beta$$

da $m - \beta = \alpha$ zu Folge (4) ist.

Daher verhalten sich die Exponenten des grössten Gliedes

$$\alpha : \beta = m\,p - \varepsilon : m\,q + \varepsilon$$

$$= p - \frac{\varepsilon}{m} : q + \frac{\varepsilon}{m}$$

nach der Gleichung (3). Ist also m sehr gross, so wird, da ε ein echter Bruch ist, $\frac{\varepsilon}{m}$ sehr klein, und man kann die nahezu richtige Proportion ansetzen:

$$\alpha : \beta = p : q$$

wodurch α und β bestimmt sind, da $\alpha + \beta = m$ sein soll. Man setze dann α gleich der grössten in $m\,p$ enthaltenen Zahl und β gleich der grössten in $m\,q + 1$ enthaltenen Zahl. Hiemit ist die Behauptung für den Fall, dass $m\,q$ keine ganze Zahl ist, erwiesen.

2) Ist $m\,q = k$ eine ganze Zahl, so ist auch $m\,p = m - k$ eine ganze Zahl. Dann ist

$$(m+1)\,q - 1 = k + q - 1 = k - p$$

sicherlich keine ganze Zahl, da p und q echte Brüche sind. Es ist aber k die

grösste ganze in $[(m+1)\,q-1]$ enthaltene Zahl. Die Bedingungen (2) werden dann:

$$A_{i+1} > A_i \quad \text{so lange} \quad i < k$$
$$A_{i+1} < A_i \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad i > k$$

Das grösste Glied ist also das Glied A_k oder

$$A_k = \binom{m}{k} p^{m-k} q^k$$

dessen Exponenten sind

$$k = m\,q$$
$$m-k = m\,(1-q) = m\,p$$

also findet die Proportion

$$m-k : h = p : q$$

genau statt.

Für den Fall, dass $(m+1)\,q$ eine ganze Zahl ist, wird das Glied $A_{(m+1)\,q} = A_{(m+1)\,q-1}$ und beide Glieder sind die grössten. Setzen wir in diesem Falle

$$k = (m+1)\,q-1 = mq+q-1 = m\,q-p$$
$$m-k = m\,p+p$$

so ist

$$A_k = \binom{m}{k} p^{m-k} q^k$$

und es wird

$$m-k : k = m\,p+p : m\,q-p$$
$$= p+\frac{p}{m} : q-\frac{p}{m}$$

also wieder angenähert

$$m-k : k = p : q$$

sich ergeben.

Anmerkung 17. Die Glieder, welche in der Nachbarschaft von dem grössten Gliede A_β der Reihe

$$A_0,\ A_1,\ A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\ A_{\beta-2},\ A_{\beta-1},\ A_\beta,\ A_{\beta+1},\ A_{\beta+2} \,.\,.\,.\,.\,.\ A_{m-1},\ A_m$$

sich befinden, unterscheiden sich sehr wenig von einander, also auch von dem grössten, sobald m sehr gross ist. Denn es ist da $\alpha+\beta = m$ ist,

$$A_{\beta+\nu+1} = \binom{m}{\beta+\nu+1} p^{\alpha-\nu-1} q^{\beta+\nu+1} = \frac{m!}{(\beta+\nu+1)!\,(m-\beta-\nu-1)!}\, p^{\alpha-\nu-1} q^{\beta+\nu+1}$$

$$A_{\beta+\nu} = \binom{m}{\beta+\nu} p^{\alpha-\nu} q^{\beta+\nu} = \frac{m!}{(\beta+\nu)!\,(m-\beta-\nu)!}\, p^{\alpha-\nu} q^{\beta+\nu}$$

also

$$\frac{A_{\beta+\nu+1}}{A_{\beta+\nu}} = \frac{m-\beta-\nu}{\beta+\nu+1} \cdot \frac{q}{p}$$

also nach Gleichungen (3)

$$\begin{aligned}\frac{A_{\beta+\nu+1}}{A_{\beta+\nu}} &= \frac{mp-\varepsilon-\nu}{mq+\varepsilon+\nu+1} \cdot \frac{q}{p} \\ &= \frac{1-\frac{\varepsilon+\nu}{mp}}{1+\frac{\varepsilon+\nu+1}{mq}} \\ &= 1-\frac{\frac{\varepsilon+\nu}{mp}+\frac{\varepsilon+\nu+1}{mq}}{1+\frac{\varepsilon+\nu+1}{mq}}.\end{aligned}$$

Ist also m eine sehr grosse, ν eine kleine ganze Zahl, so dass auch mq sehr gross wird, so ist der Subtrahend sehr klein, also ist der Quotient

$$\frac{A_{\beta+\nu+1}}{A_{\beta+\nu}}$$

wenig von 1 verschieden, also ist auch $A_{\beta+\nu+1}$ wenig von $A_{\beta+\nu}$ verschieden, so lange ν nicht sehr gross wird. Dasselbe gilt auch für die A_β vorausgehenden Glieder, denn es ist

$$\begin{aligned}A_{\beta-\nu+1} &= \binom{m}{\beta-\nu+1} p^{\alpha+\nu-1} q^{\beta-\nu+1} = \frac{m!}{(\beta-\nu+1)!\,(m-\beta+\nu-1)!} p^{\alpha+\nu-1} q^{\beta-\nu+1} \\ A_{\beta-\nu} &= \binom{m}{\beta-\nu} p^{\alpha+\nu} q^{\beta-\nu} = \frac{m!}{(\beta-\nu)!\,(m-\beta+\nu)!} p^{\alpha+\nu} q^{\beta-\nu}\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{A_{\beta-\nu+1}}{A_{\beta-\nu}} &= \frac{m-\beta+\nu}{\beta-\nu+1} \cdot \frac{q}{p} \\ &= \frac{\alpha+\nu}{\beta-\nu+1} \cdot \frac{q}{p} \\ &= \frac{mp+\nu-\varepsilon}{mq+\varepsilon-\nu+1} \cdot \frac{q}{p} \\ &= \frac{1+\frac{\nu-\varepsilon}{mp}}{1-\frac{\nu-1-\varepsilon}{mq}} \\ &= 1+\frac{\frac{\nu-\varepsilon}{mp}+\frac{\nu-1-\varepsilon}{mq}}{1-\frac{\nu-1-\varepsilon}{mq}},\end{aligned}$$

daher für kleine Werte von ν und sehr grosse m der Wert von $A_{\beta-\nu+1}$ wenig von dem Werte $A_{\beta-\nu}$ sich unterscheidet, da beide Brüche

$$\frac{\nu-\varepsilon}{mp}, \quad \frac{\nu-1-\varepsilon}{mq}$$

sehr klein sind.

In der Nähe des Maximalgliedes A_β nehmen also die Glieder zu beiden Seiten langsam ab, was eine jedes Maximum begleitende Thatsache ist.

Frage 16. Man trägt die Grössen n und

$$y_n = \binom{m}{\beta + n} p^{\alpha - n} q^{\beta + n}$$

als Abscisse und Ordinate in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf, und verbindet die so erhaltenen diskreten Punkte. Man erhält hiedurch eine Curve, wie sie in Anmerkung 16 gezeichnet wurde. Lässt man nun m ins Unendliche wachsen, so dass die erhaltenen Punkte stetig auf einander folgen, so erhält man als ihren Ort eine Curve, welches ist die Gleichung dieser Curve?

Antwort. Bezeichnet man mit x die Abscisse und y die Ordinate eines Punktes der Curve, so ist ihre Gleichung

$$y = A e^{-h^2 x^2}$$

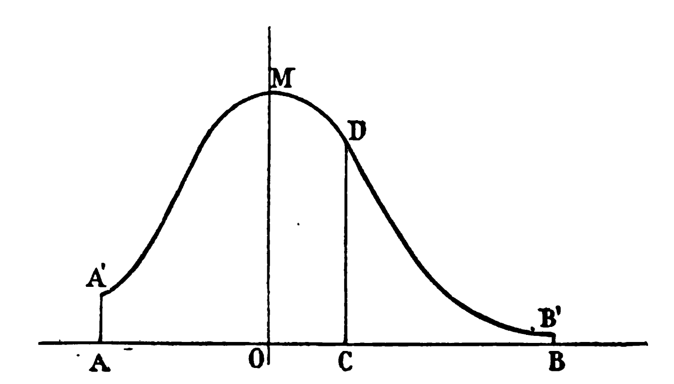
wobei A und h gewisse Constanten sind.

Beweis: Wir tragen uns von O, Fig. 10, das Stück OB nach links, das Stück OA nach rechts ab und setzen

$$AB = L$$

Teilen wir nun OB in α und OA in β Teile und errichten in jedem die Ordinate, so dass in dem $\pm n^{\text{ten}}$ Teilpunkt von O aus gerechnet, diese den Wert

Figur 10.



$y_{\pm n}$ hat, so gibt die Verbindungslinie aller Punkte eine Kurve $A'MDB$, welche nur über dem Stücke AB der Abscissenaxe sich ausbreite.

Hiebei ist unsere Einheit auf der Achse OB so gewählt, dass sie

$$= \frac{AB}{m} = \frac{L}{m}$$

ist.

Da nun

$$y_n = \frac{m!}{(\beta+n)!\,(\alpha-n)!}\,p^{\alpha-n}\,q^{\beta+n}$$

$$y_{n+1} = \frac{m!}{(\beta+n+1)!\,(\alpha-n-1)!}\,p^{\alpha-n-1}\,q^{\beta-n+1}$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\alpha-n}{\beta+n+1}\cdot\frac{q}{p}$$

also

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 = \frac{(\alpha-n)\,q-(\beta+n+1)\,p}{(\beta+n+1)\,p}$$

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n} = \frac{-n+(\varepsilon-p)}{p\,(\beta+n+1)} \quad \ldots\ldots (7)$$

wenn man die Gleichungen (3) berücksichtigt.

Setzen wir nun

$$\triangle x = \frac{L}{m} \quad \ldots\ldots (8)$$

so dass $\triangle x$ die Länge wird, die wir als Einheit auf OB aufgetragen haben, so wird OC die Länge $n\triangle x$ besitzen, die wir mit x_n bezeichnen wollen, es wird also dann

$$x_n = n\triangle x$$

oder

$$n = \frac{x_n}{\triangle x}$$

und die Gleichung (7) übergeht in

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n} = \frac{-x_n+(\varepsilon-p)\triangle x}{p\,\beta\triangle x+p\,(n+1)\triangle x}$$

und da $(n+1)\triangle x = x_{n+1}$ die nächste Abscisse ist, so wird

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\triangle x} = \frac{-x_n\,y_n+(\varepsilon-p)\,y_n\triangle x}{p\,\beta\triangle x^2+p\,x_{n+1}\triangle x} \quad (9)$$

Lassen wir nun m ins Unendliche wachsen, so wird nach (8), da L konstant bleiben soll, $\triangle x$ ins Unendliche abnehmen und auch $y_{n+1}-y_n$ wird als

Unterschied aufeinander folgender Ordinaten unendlich klein werden, so dass

$$\lim_{m=\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$$

gesetzt werden muss.

Da ferner y_n und x_{n+1} endliche Grössen sind, so wird

$$\lim_{m=\infty} (\varepsilon - p) y_n \triangle x = 0$$

$$\lim_{m=\infty} p x_{n+1} \quad \triangle x = 0$$

sein.

Es handelt sich noch um den Grenzwert von

$$p \beta \triangle x^2 = p q m \triangle x^2 - \varepsilon p \triangle x^2$$

oder da

$$\lim_{m=\infty} \varepsilon p \triangle x^2 = 0$$

ist, so wird

$$\lim_{m=\infty} p \beta \triangle x^2 = p q \lim_{m=\infty} m \triangle x^2$$

Nun ist $m \triangle x = L$ also bis jetzt die endliche Strecke, über welcher sich die Curve erhebt. Wir lassen nun auch L unendlich werden, so dass sich die Curve über der ganzen unendlichen x-Achse erstreckt. Dann wird $L . \triangle x$, da $\triangle x$ ins Unendliche abnimmt, das Anwachsen von L stets so gewählt werden können, dass

$$p q \lim_{m=\infty} L . \triangle x = p q \lim_{m=\infty} m \triangle x^2 = \frac{1}{2 h^2} \quad . \; . \; . \; (10)$$

wird, h eine beliebige Constante ist.

Geht man daher in Gleichung (31) zu den Grenzwerten über, so wird sich

$$\frac{dy}{dx} = -2 h^2 x y \quad . \; . \; . \; . \; (11)$$

ergeben, wenn x und y statt $x_n\, y_n$ gesetzt wird. Dies ist die Differentialgleichung unserer Curve. Aus ihr folgt

$$\frac{dy}{y} = -2 h^2 x \, dx$$

oder wenn beide Seiten unbestimmt in-

tegriert werden und $\lg A$ die willkürliche Constante ist

$$\lg y - \lg A = -h^2 x^2$$

oder

$$y = A e^{-h^2 x^2} \ldots\ldots (12)$$

w. z. B. w.

Hiebei ist:

$$2 h^2 = \frac{1}{\lim pqm \triangle x^2} \ldots (13)$$

oder

$$h = \frac{1}{\lim \triangle x \sqrt{2pqm}}$$

Frage 17. Der Wert

$$y_n = \binom{m}{\beta + n} p^{\alpha - n} q^{\beta + n}$$

stellt die relative Wahrscheinlichkeit w dar, dass ein Ereignis n-mal weniger oft eintrifft, als es für das wahrscheinlichste Ereignis der Fall ist.

Wie berechnet man diese relative Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass m sehr gross ist, mittels der Gleichung

$$y = A e^{-h^2 x^2} ?$$

Antwort. Die Gleichung (12) gilt nur für unendlich gross m in aller Strenge. Aber man kann dieselbe auch für grosse endliche Werte von m anwenden, ohne bedeutende Fehler zu begehen. Hiebei ist zu beachten, dass dann statt dx gesetzt werden muss $\triangle x$ und dass

$$n \triangle x = x$$

oder

$$n = \frac{x}{\triangle x} \ldots\ldots (14)$$

ist. Es wird dann

$$y_n = A e^{-h^2 x^2} \ldots\ldots (12)$$

die Wahrscheinlichkeit darstellen, dass das Ereignis $\frac{x}{\triangle x} = n$-mal weniger oft eintritt, als es für das wahrscheinlichste der Fall ist und mithin wird die relative Wahrscheinlichkeit hiefür

$$w = \frac{y_n}{\sum_{-\beta}^{+\alpha} {}_i y_n}$$

sein (vergleiche Frage 10), wobei die Summe zu nehmen ist von $i = -\beta$ bis $i = +\alpha$, damit alle Wahrscheinlichkeiten in dieselbe eintreten, denn ist $\beta + i = mq + i - \varepsilon = k$, so durchlauft k die Werte von O bis $\beta + \alpha = m$.

Setzen wir nun

$$-\beta = \frac{-x_0}{\triangle x}, \qquad \alpha = \frac{x_1}{\triangle x}$$

so können wir w auch in der Form schreiben

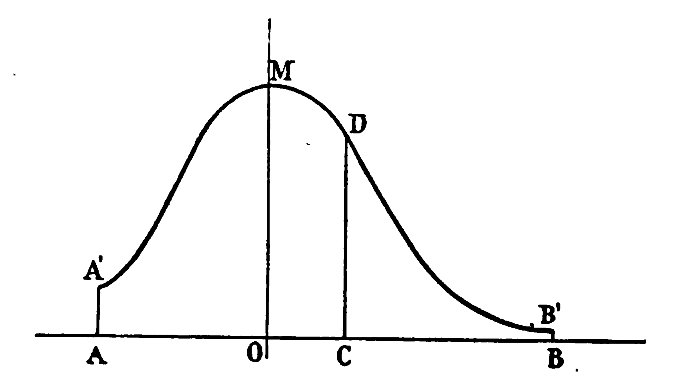
$$w = \frac{e^{-h^2x^2}}{\sum\limits_{-x_0}^{+x_1} e^{-h^2x^2}}$$

wobei in der Summe die Glieder auftreten, die immer um $\triangle x$ von einander abstehen. Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\triangle x$, so wird

$$w = \frac{e^{-h^2x^2} \triangle x}{\sum\limits_{-x_0}^{+x_1} e^{-h^2x^2} \triangle x}$$

Lassen wir nun wieder m ins Unendliche wachsen, so dass $\triangle x$ in dx übergeht, so wird die Summe in Nenner, da sowohl x_0 als x_1 ins Unendliche rücken, denn die Punkte A und B, Figur 11, thuen

Figur 11.



es, zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen sein und gleichzeitig können wir dieselbe, da $\triangle x$ in dx übergeht, als das bestimmte Integral zwischen diesen Grenzen auffassen, so dass

$$w = \frac{e^{-h^2x^2}\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\, dx}$$

wird. Nun ist, wie im Anhang bewiesen wird

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

und also

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \ldots (15)$$

Dies ist also die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit.

Wenn wir in Gleichung (12) die willkürliche Konstante A ersetzen durch $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$, so wird die Gleichung unserer Curve

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \ldots\ldots (16)$$

und die entsprechende relative Wahrscheinlichkeit

Formel (9): $w = y\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$

Setzen wir nun wieder voraus, m wäre sehr gross aber endlich, so dass

$$n = \frac{x}{\triangle x}$$

ist und nach Gleichung (13)

$$h = \frac{1}{\triangle x \sqrt{2 p q m}}$$

gesetzt werden kann, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$y = \frac{1}{\triangle x \sqrt{2 \pi p q m}} \cdot e^{-\frac{x^2}{\triangle x^2} \cdot \frac{1}{2 p q m}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 p q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\triangle x \sqrt{m}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\triangle x \sqrt{m}}\right)^2 \frac{1}{2 p q}} \ldots (17)$$

Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2 p q}} \cdot \frac{x}{\triangle x \sqrt{m}} &= \xi \\ y \cdot \sqrt{2 p q}\, \triangle x \sqrt{m} &= \eta \end{aligned}\right\} \ldots (18)$$

so übergeht (17) in

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{-\xi^2} \ldots\ldots (19)$$

welcher Ausdruck leicht berechenbar ist und durch Gleichungen (18), sodann die Werte von x und y liefert. Es ergibt

sich dann wie früher die relative Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{\eta}{\sum\limits_{-\beta}^{+\alpha} \eta} \quad \ldots \ldots \; (20)$$

Entwirft man nun eine Tafel, wie im Anhange Tafel I, in welcher die Werte von η aus 19 für ξ von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ fortschreitend angegeben sind, so kann man die $\sum\limits_{-\beta}^{+\alpha} \eta$ einfach durch Addition der Kolumne für η erhalten.

Da hiebei für ein negatives ξ sich derselbe Wert für η ergeben muss nach (19), wie für ein gleich grosses positives ξ, und da ferner die Tafel lehrt, dass für $\xi = 3{,}3$ der Wert von η kleiner als $\frac{1}{100000}$ ist, so kann man, sobald β und α grösser als 3,3 ist

$$\sum_{-\beta}^{+\alpha} \eta = \sum_{-\alpha}^{o} \eta + \sum_{o}^{+\alpha} \eta = 2 \sum_{o}^{\alpha} \eta$$

setzen, oder wenn die Summe der Zahlen für η von o bis 3,3 mit S bezeichnet wird, kann man

$$\sum_{-\beta}^{+\alpha} \eta = 2\,S = 10{,}56395$$

ohne grossen Fehler setzen, so dass schliesslich, da $\frac{1}{10{,}56395} = 0{,}094661$ ist

Formel (10):
$$\begin{cases} w = 0{,}094661 \, . \, \eta \\ \eta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \, e^{-\xi^2} \\ \xi = \dfrac{1}{\sqrt{2pq}} \cdot \dfrac{x}{\triangle x \sqrt{m}} \end{cases}$$

Als Anwendung dieser Formel vergleiche Aufgabe 82.

Anmerkung 18. Die Curve, deren Gleichung:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \; e^{-\xi^2}$$

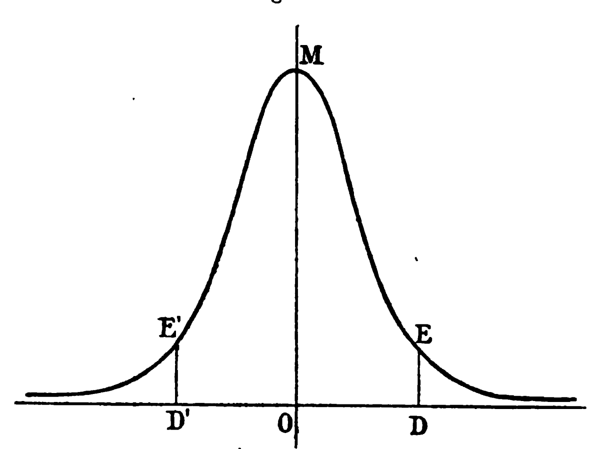
ist, ist symmetrisch zu der η-Achse, in dem für ξ und $-\xi$ sich dasselbe η ergibt. Die ξ-Achse ist eine Asymptote der Kurve. Sie besitzt in E und E' je einen Wendepunkt, dessen Abscissen $OD = \omega$ sich aus der Gleichung:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 2\eta\,(2\xi^2 - 1) = O$$

ergeben, die also

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad \omega' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Figur 12.



sind. Mithin ist die Ordinate: $\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$ für beide Punkte. Die Rechnung ergibt dann

$$\omega = 0{,}7071068 \qquad \eta = 0{,}3421983$$

Das Stück $E'ME$ ist concav gegen die ξ-Achse, während von E bis $+\infty$ und E' bis $-\infty$ die Curve ihre convexe Seite der ξ-Achse zukehrt. Die grösste Ordinate ist: $OM = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56419$.

Frage 18. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit für das wiederholte Eintreffen mehrerer Ereignisse, wenn auf die Reihenfolge des Eintreffens keine Rücksicht genommen wird und die einzelne Ereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit bei den einzelnen Versuchen besitzen?

Antwort. Seien $E_1, E_2 \ldots E_k$ k Ereignisse, welchen die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2 \ldots p_k$ zukommen und es sollen

$$m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

Versuche gemacht werden, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $E_1 \ldots n_1$-mal, $E_2 \ldots n_2$-mal .... $E_k \ldots n_k$-mal auftritt, gegeben durch die

Formel 11: $$w = \frac{m!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\,p_1^{n_1}\,p_2^{n_2}\ldots\ldots p_k^{n_k}$$

$$m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

gegeben.

Frage 19. Wie beweist man die Formel 11?

Antwort. Wir wollen sie für den Fall dreier Ereignisse beweisen, allgemein geht dann der Beweis genau so.

Wir denken uns eine Urne die a weisse, b schwarze und c rote Kugeln besitzt. Das Ereignis E_1 deuten wir als das Ziehen einer weissen, E_2 einer schwarzen, E_3 einer roten Kugel. Dann ist

$$p_1 = \frac{a}{a+b+c}$$

$$p_2 = \frac{b}{a+b+c}$$

$$p_3 = \frac{c}{a+b+e}$$

Setzen wir nun irgend eine Reihenfolge fest, in welcher n_1 weisse, n_2 schwarze und n_3 rote Kugeln in den $m = n_1 + n_2 + n_3$ Zügen auftreten sollen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Ereignisses

$$= p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist dieselbe für irgend welche angegebene Reihenfolge. Da aber jede mögliche Reihenfolge der n_1 weissen, n_2 schwarzen, n_3 roten Kugeln zulässig ist, so wird die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$w = N \cdot p_1^{n_1}\, p_2^{n_2}\, p_3^{n_3}$$

sein, wenn N die Anzahl der möglichen Reihenfolgen ist.

Denken wir uns die m Züge markiert, derart, dass wir, sobald eine weisse Kugel erscheint den Buchstaben α, sobald eine schwarze erscheint den Buchstaben β und bei dem Erscheinen einer roten den Buchstaben γ anschreiben. Dann haben wir nach den m Zügen n_1 Buchstaben α, n_2 Buchstaben β und n_3 Buchstaben γ in irgend einer Reihenfolge angeschrieben. Da nun jede Reihenfolge eine Permutation der n_1 Buchstaben α, n_2 Buchstaben β und n_3 Buchstaben γ ist, so gibt es soviel Reihenfolgen für das Ziehen der n_1 weissen, n_2 schwarzen und n_3 roten Kugeln, als es Permutationen

von n_1 Buchstaben α, n_2 Buchstaben β und n_3 Buchstaben γ gibt. Daher ist

$$N = P'_{n_1+n_2+n_3}$$

und nach Formel d' also

$$N = \frac{m!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}\quad m = n_1 + {}_2n + n_3$$

Mithin wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{m!}{n_1!\ n_2!\ n!_3}\ p_1^{n_1}\ p_2^{n_2}\ p_3^{n_3}$$

welchen Wert eben die Formel 11 gibt für 3 Ereignisse.

Anmerkung 19. Zerlegen wir m auf alle mögliche Arten in k Summanden, also $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, wo jedes der n_i alle Werte zwischen o und m durchlaufen soll, so erhalten wir in den Zahlen n_i alle möglichen Arten, in denen sich die Ereignisse E_1, $E_2 \ldots E_k$ kombinieren können. Nach dem polynomischen Lehrsatz (siehe Kleyers Lehrb. der Potenzen und Wurzeln) ist:

$$\sum_{n_1, n_2 \ldots n_k} \frac{m!}{n_1!\ n_2!\ n \ldots n_k!}\ p_1^{n^1}\ p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k} = (p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^m$$

Die Summe erstreckt über alle Werte der n_i zwischen o und m, wobei stets $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ sein muss.

Anmerkung 20. Setzen wir voraus, dass bei jedem Versuche eines der Ereignisse E_1 $E_2 \ldots E_k$ eintreten muss, so wird nach Formel 2'

$$p_1 + p_2 + \ldots p_k = 1$$

also auch

$$\sum_{n_1, n_2 \ldots n_k} \frac{m!}{n_1!\ n_2!\ n \ldots n_k!}\ p_1^{n^1}\ p_2^{n_2} \ldots p_k^{nk} = 1$$

$$m = n_1 + n^2 + \ldots + n_k$$

sein, die Summe erstreckt über alle n_i zwischen o und m.

Gelöste Aufgaben.

(Anwendung der im II. Teil abgeleiteten Sätze und Formeln, sowie der Formeln des I. Teiles.)

Aufgabe 71. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür aus einer Urne, die a weisse und b schwarze Kugeln enthält in m Zügen $m-k$ weisse und k schwarze Kugeln zu ziehen, wenn die gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt wird?

Auflösung. Wir fanden in der Auflösung der Aufgabe 25, dass für eine bestimmte Anordnung des Erscheinens der weissen und schwarzen Kugeln (es war dort die Anord-

nung, dass zuerst $m-k$ weisse und dann k schwarze Kugeln erscheinen) die Wahrscheinlichkeit

$$w_1 = \frac{(m-k)!\,k!}{m!} \cdot \frac{\binom{a}{m-k} \cdot \binom{b}{k}}{\binom{a+b}{m}}$$

ist. Da wir nun von der Anordnung absehen, so kann jede Permutation der $m-k$ Elemente α und der k Elemente β eine Reihenfolge angeben, wenn wir unter α eine weisse, unter β eine schwarze Kugel verstehen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$w_1 \cdot P'_{m-k,\,k}$$

da w_1 für jede Anordnung denselben Wert behält. Es ist also mit Rücksicht auf Formel d:

$$w = \frac{\binom{a}{m-k} \cdot \binom{b}{k}}{\binom{a+b}{m}}$$

Wir hätten diesen Wert auch direkt erhalten können durch folgende Überlegung. Man denke sich die m Ziehungen so vollführt, dass man m Kugeln aus der Urne auf einmal herausgreift. Dann ist die Anzahl möglicher Fälle:

$$\binom{a+b}{m}$$

Die Anzahl der Fälle, in denen $(m-k)$ weisse Kugeln mit k schwarzen Kugeln zusammentreffen, ist

$$\binom{a}{a-m} \cdot \binom{b}{k}$$

denn jede Kombination der a weissen Kugeln zu $m-k$ gibt mit jeder Kombination der b schwarzen Kugeln zu k eine Anordnung der verlangten Art. Also ist

$$w = \frac{\binom{a}{m-k} \cdot \binom{b}{k}}{\binom{a+b}{m}}$$

Anmerkung 21. Die Wahrscheinlichkeiten, dass bei dem Herausgreifen von m Kugeln unter diesen:

$$m,\ m-1,\ m-2 \ldots\ldots 1,\ 0 \text{ weisse sind,}$$

ergaben sich nach vorstehender Aufgabe:

$$\frac{\binom{a}{m}}{\binom{a+b}{m}},\ \frac{\binom{a}{m-1}\binom{b}{1}}{\binom{a+b}{m}},\ \frac{\binom{a}{m-2}\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{m}} \ldots\ldots \frac{\binom{a}{1}\binom{b}{m-1}}{\binom{a+b}{m}},\ \frac{\binom{b}{m}}{\binom{a+b}{m}}$$

Da nun einer dieser $(m+1)$ Fälle notwendig eintreten muss, so ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1, d. h. es ist

$$\frac{\binom{a}{m}}{\binom{a+b}{m}} + \frac{\binom{a}{m-1}\binom{b}{1}}{\binom{a+b}{m}} + \frac{\binom{a}{m-2}\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{m}} + \ldots\ldots + \frac{\binom{a}{1}\binom{b}{m-1}}{\binom{a+b}{m}} + \frac{\binom{b}{m}}{\binom{a+b}{m}} = 1$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man sie mit $\binom{a+b}{m}$ multipliziert, die

Formel e: $$\binom{a}{m} + \binom{a}{m-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{m-2}\cdot\binom{b}{2} + \ldots + \binom{a}{1}\cdot\binom{b}{m-1} + \binom{b}{m} = \binom{a+b}{m}$$

wobei $a \geqq m$ und $b \geqq m$ sein muss.

Aufgabe 72. In einer Urne befinden sich a_1 Kugeln mit 1, a_2 mit 2, a_3 mit 3 ... a_k Kugeln mit k bezeichnet. Es werden m Kugeln gezogen (entweder auf einmal oder in m aufeinanderfolgenden Zügen, ohne dass die gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird), welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass n_1 Kugeln 1, n_2 Kugeln 2, n_3 Kugeln 3 ... n_k Kugeln k gezogen werden?

Auflösung. Es seien im ganzen

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_k$$

Kugeln in der Urne, dann ist die Anzahl möglicher Fälle aus diesen m herauszugreifen:

$$\binom{s}{m}$$

Ferner bildet jede Kombination von n_1 der a_1 Kugeln mit den Kombinationen der n_2^{ten} Klasse der a_2, der n_3^{ten} Klasse der a_3 ... der n_k^{ten} Klasse der a_k einen günstigen Fall, indem unter den

$$m = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots + n_k$$

herausgegriffenen Kugeln n_1 Kugeln 1, n_2 Kugeln 2, n_3 Kugeln 3 ... n_k Kugeln k auftreten. Die Anzahl günstiger Fälle ist mithin:

$$\binom{a_1}{n_1}\cdot\binom{a_2}{n_2}\cdot\binom{a_3}{n_3} \cdots \binom{a_k}{n_k}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist mithin

$$w = \frac{\binom{a_1}{n_1}\cdot\binom{a_2}{n_2}\cdot\binom{a_3}{n_3} \cdots \binom{a_k}{n_k}}{\binom{s}{m}}$$

wobei

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$
$$m = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$$

Anmerkung 22. Lässt man unter der Bedingung $m = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ die Zahlen $n_1, n_2, n_3 \ldots n_k$ unabhängig von einander alle Zahlen zwischen o und m durchlaufen, so erhält man in denselben alle möglichen Kombinationen, in denen die Kugeln 1, 2, 3 ... k unter den m herausgegriffenen auftreten können. Daher ist die Summe der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gleich 1, d. h. es ist

$$\sum_{n_1, n_2, n_3 \ldots n_k} \frac{\binom{a_1}{n_1}\binom{a_2}{n_2}\binom{a_3}{n_3}\cdots\binom{a_k}{n_k}}{\binom{s}{m}} = 1 \qquad s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

wobei die Summe zu erstrecken ist über alle positive Zahlen $n_1, n_2, n_3 \ldots n_k$, welche der Gleichung $m = n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_k$ entsprechen.

Wird der gemeinschaftliche Nenner auf die rechte Seite gebracht, so erhält man die Relation:

$$\text{Formel e}': \sum_{n_1, n_2, n_3, \ldots n_k} \binom{a_1}{n_1} \cdot \binom{a_2}{n_2} \cdot \binom{a_3}{n_3} \ldots \binom{a_k}{n_k} = \binom{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}{m}$$

$$m = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$$

Aufgabe 73. In einer Urne befinden sich a weisse und b schwarze Kugeln. Es werden m Kugeln auf einmal herausgezogen, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln sich wenigstens $(m - \nu)$ weisse, also höchstens ν schwarze befinden?

Auflösung. Nach Aufgabe 71 ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den m gezogenen Kugeln $m - k$ weisse und k schwarze befinden:

$$w_k = \frac{\binom{a}{m-k} \cdot \binom{b}{k}}{\binom{a+b}{m}}$$

Nun können folgende Fälle eintreten:

1) Es sind m weisse o schwarze Kugeln
2) „ „ $m-1$ „ 1 „ „
3) „ „ $m-2$ „ 2 „ „
4) „ „ $m-3$ „ 3 „ „
.
.
.
$\nu + 1$) „ „ $m - \nu$ „ ν „ „

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für diese Fälle ergeben sich aus dem obigen Werte w_k, wenn für k gesetzt wird der Reihe nach $0, 1, 2, 3 \ldots \nu$. Da nun das gewünschte Ereignis: „Dass unter den m Kugeln wenigstens $(m - \nu)$ weisse sind“ eintritt, sobald irgend ein der $(\nu + 1)$ aufgezählten Fälle eintritt, so ist nach Formel 3′ die gesuchte Wahrscheinlichkeit die Summe der eben angegebenen Wahrscheinlichkeiten, d. h. es ist

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu$$

oder

$$w = \frac{\binom{a}{m} + \binom{a}{m-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{m-2}\binom{b}{2} + \ldots + \binom{a}{m-\nu}\binom{b}{\nu}}{\binom{a+b}{m}}$$

Aufgabe 74. In einer Urne sind a weisse, b schwarze Kugeln, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Herausziehen von m Kugeln wenigstens eine weiss ist?

Auflösung. Die Auflösung ergibt sich nach der vorigen Aufgabe für $\nu = m - 1$

$$w = \frac{\binom{a}{m} + \binom{a}{m-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{m-2}\binom{b}{2} + \ldots + \binom{a}{1}\binom{b}{m-1}}{\binom{a+b}{m}}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

803. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Erster Teil.
Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.
Forts. v. Heft 802. — Seite 81—96.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere **Analysis,** Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 802. — Seite 81—96.

Inhalt:

Gelöste Aufgaben.

Stuttgart 1890.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln **angeordnet** — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende **Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht verges[illegible] mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen** B[illegible] zweigen **vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleih[illegible] somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** [illegible]

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische [illegible]gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der [illegible] verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Ve[illegible] Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird derer [illegible] thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshan[illegible]**

Da aber nach Formel (e):

$$1 = \frac{\binom{a}{m} + \binom{a}{m-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{m-2}\binom{b}{2} + \cdots \div \binom{a}{1}\binom{b}{m-1} + \binom{b}{m}}{\binom{a+b}{m}}$$

so folgt durch Subtraktion

$$w_1 = 1 - \frac{\binom{b}{m}}{\binom{a+b}{m}}$$

Diesen Wert hätten wir auch so erhalten können. Ist w' die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass unter den m Kugeln lauter schwarze sind, so ist nach Aufgabe 78 für $k = m$

$$w' = \frac{\binom{b}{m}}{\binom{a+b}{m}}$$

und daher nach Formel 2:

$$w_1 = 1 - w' = 1 - \frac{\binom{b}{m}}{\binom{a+b}{m}}$$

Aufgabe 75. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Lotterieziehung wenigstens eine einzifferige Zahl erscheint?

NB. Vergleiche die Erklärung: 6.

Auflösung. Da bei jeder Ziehung 5 Nummern gezogen werden, wobei die gezogene Nummer nicht wieder zurückgelegt wird, und unter den 90 Nummern 9 einzifferige und 81 zweizifferige sind, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach Aufgabe 74

$$w = 1 - \frac{\binom{81}{5}}{\binom{90}{5}}$$

man braucht nur $b = 81$ und $a = 9$ zu setzen. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass lauter zweizifferige Zahlen in der Ziehung erscheinen, ist:

$$w' = \frac{\binom{81}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{81 . 80 . 79 . 78 . 77}{90 . 89 . 88 . 87 . 86}$$

also nach nebenstehender Rechnung

$$w' = 0{,}583$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$w = 0{,}417$$

Nebenrechnung:

log 81 = 1,9084850	log 90 = 1,9542425
log 80 = 1,9030900	log 89 = 1,9493900
log 79 = 1,8976271	log 88 = 1,9444827
log 78 = 1,8920946	log 87 = 1,9395193
log 77 = 1,8864907	log 86 = 1,9344985
9,4877874	9,7221330
9,7221330	
log w' = 0,7656544 — 1	
w' = 0,58298	

Aufgabe 76. Zwei Personen A und B spielen miteinander. Jede Partie muss von einem der Spieler gewonnen werden. A muss

a Partien, B aber b Partien gewinnen, damit er das Spiel gewinnt. Nun hat A die Wahrscheinlichkeit p und B die Wahrscheinlichkeit q eine Partie zu gewinnen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A das Spiel gewinnt?

Erkl. 27. Da einer der Spieler jede Partie gewinnen oder verlieren muss, so ist

$$p + q = 1$$

Auflösung. Das Spiel ist in höchstens $m = a + b - 1$ Partien beendet, denn es kann entweder A die ihm nötigen a Partien und B inzwischen höchstens $b - 1$ Partien gewinnen, oder es kann B die ihm nötigen b Partien gewinnen und A inzwischen höchstens $a - 1$ Partien. Im ersten Falle gewinnt A, im zweiten Falle B das Spiel.

Soll A das Spiel gewinnen, so endet das Spiel mit einer von A gewonnenen Partie. Es können daher folgende Fälle eintreten:

1. A gewinnt a Partien hintereinander, die B alle verspielt. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$w_1 = p^a$$

nach Formel 8.

2. A gewinnt von $a+1$ gespielten Partien die ersten $a - 1$, während B inzwischen 1 Partie gewinnt, und schliesslich gewinnt A die letzte Partie, wodurch das Spiel beendet wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den a ersten Partien A ihrer $a - 1$ und B blos 1 gewinnt, ist nach Formel 8:

$$w_0 = \binom{a}{1} p^{a-1} q.$$

Soll nun A noch die letzte Partie gewinnen, so ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dieser beiden Ereignisse $= w_0 . p$, also ist

$$w_2 = \binom{a}{1} p^{a-1} . q . p$$

$$w_2 = \binom{a}{1} p^a q$$

3. Es werden $a + 2$ Partien gespielt. Unter den $a + 1$ ersten gewinnt A ihrer $a - 1$, während B ihrer 2 gewinnt, schliesslich gewinnt A die letzte Partie. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit hiefür ist also

$$w_3 = \binom{a+1}{2} p^{a-1} q^2 . p$$

$$w_3 = \binom{a+1}{2} p^a q^2$$

4. Es werden $a + 3$ Partien gespielt. Unter den $a + 2$ ersten gewinnt A ihrer $(a - 1)$ und verliert 3 Partien an B. Schliesslich gewinnt A die letzte. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher

$$w_4 = \binom{a+2}{2} p^{a-1} q^3 . p$$

$$w_4 = \binom{a+2}{3} p^a q^3$$

u. s. w. bis

m) Es werden $m = a + b - 1$ Partien gespielt, unter den $m - 1$ ersten Partien gewinnt A ihrer $a - 1$ und verliert $b - 1$ an B. schliesslich gewinnt A die letzte Partie. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$w_m = \binom{m-1}{b-1} p^{a-1} q^{b-1} \cdot p$$

$$w_m = \binom{m-1}{b-1} p^a q^{b-1}$$

Da nun in irgend einem der m Fälle A das Spiel gewinnt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach Formel 3' gleich der Summe aller gefundenen Wahrscheinlichkeiten, d. h. es ist

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_m$$

oder

$$w = p^a + \binom{a}{1} p^a q + \binom{a+1}{2} p^a q^2 + \binom{a+2}{3} p^a q^3 + \ldots\ldots + \binom{m-1}{b-1} p^a q^{b-1}$$

also

$$w = p^a \left[1 + \binom{a}{1} q + \binom{a+1}{2} q^2 + \binom{a+2}{3} q^3 + \ldots + \binom{m-1}{b-1} q^{b-1}\right].$$

$$m = a + b - 1$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit w' dass B gewinnt, ergibt sich ganz analog, folgt übrigens direkt aus dem Werte für w, wenn man an Stelle von p und a einführt q und b, so dass

$$w' = q^b \left[1 + \binom{b}{1} p + \binom{b+1}{2} p^2 + \binom{b+2}{3} p^3 + \ldots \binom{m-1}{a-1} p^{a-1}\right]$$

sich ergibt. Es muss nun

$$w + w' = 1$$

sein. Dies lässt sich auch direkt beweisen.

Setzt man

$$w = f(a, b), \quad w' = f'(a, b)$$

indem man die Abhängigkeit der Grössen w und w' von den Zahlen a und b besonders hervorhebt, so wird

$$\left.\begin{aligned} f(a, b) &= p^a \sum_{i=0}^{i=b-1} \binom{a+i-1}{i} q^i \\ f'(a, b) &= q^b \sum_{i=0}^{i=a-1} \binom{b+i-1}{i} p^i \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

analog folgt nun

$$\left.\begin{aligned} f(a+1, b) &= p^{a+1} \sum_{i=0}^{i=b-1} \binom{a+i}{i} q^i \\ f'(a+1, b) &= q^b \sum_{i=0}^{i=a} \binom{b+i-1}{i} p^i \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

Die erste der Gleichungen lässt sich mit Hilfe der aus Formel (e) gezogenen Relation:

$$\binom{s+1}{i} = \binom{s}{i} + \binom{s}{i-1} \quad \ldots\ldots (3)$$

wenn darin $s = a - 1$ gesetzt wird in folgender Weise umformen. Es wird

$$f(a+1, b) = p^{a+1} \sum_{o}^{b-1}{}_i \left\{ \binom{a+i-1}{i} + \binom{a+i-1}{i-1} \right\} q^i$$

$$= p^{a+1} \sum_{o}^{b-1} \binom{a+i-1}{i} q^i + p^{a+1} \sum_{1}^{b-1} \binom{a+i-1}{i-1} q^i$$

Betrachtet man die Gleichungen (1), so ersieht man, dass die erste Summe gleich $pf(a, b) = (1-q) f(a, b)$ ist, da ja $p + q = 1$ ist, also ist

$$f(a+1, b) = f(a, b) - q f(a, b) + p^{a+1} \sum_{1}^{b-1} \binom{a+i-1}{i-1} q$$

In der Summe rechter Hand führen wir statt i einen neuen Summationsindex i' ein, indem wir $i' = i - 1$ setzen, so dass für $i = 1$ $i' = 0$ und für $i = b - 1$, $i' = b - 2$ wird. Es wird dann

$$f(a+1, b) = f(a, b) - q f(a, b) + p^{a+1} \sum_{o}^{b-2}{}_{i'} \binom{a+i'}{i'} q^{i'+1}$$

oder wenn wir den $'$ weglassen:

$$f(a+1, b) = f(a, b) - q f(a, b) + q\, p^{a+1} \sum_{o}^{b-2}{}_i \binom{a+i}{i} q^i$$

vergleicht man den Ausdruck

$$p^{a+1} \sum_{i=o}^{i=b-2} \binom{a+i}{i} q^i$$

mit den Gleichungen (1) so ersieht man, dass derselbe

$$f(a+1, b-1)$$

ist, dass also

$$f(a+1, b) = f(a, b) - q \left\{ f(a, b) - f(a+1, b-1) \right\} \quad . . (4)$$

sich ergibt. Die rechte Seite lässt noch eine weitere Vereinfachung zu. Es ist

$$(a, b) - f(a+1, b-1) = p^a \sum_{o}^{b-1} \binom{a+i-1}{i} q^i - p^{a+1} \sum_{o}^{b-2} \binom{a+i}{i} q^i$$

$$= p^a q^{b-1} \binom{a+b-2}{b-1} + p^a \sum_{o}^{b-2} \binom{a+i-1}{i} q^i - p^{a+1} \sum_{o}^{b-2} \binom{a+i}{i} q^i$$

wenn man in der ersten Summe das Glied für $i = b - 1$ ausscheidet. Zieht man die beiden anderen Summen zusammen, so folgt:

$$(a,\ b) - f\ (a+1,\ b-1) = p^a q^{b-1}\binom{a+b-2}{b-1} + p^a \sum_{o}^{b-2} \left\{\binom{a+i-1}{i} - \binom{a+i}{i} p\right\} q^i \quad \ldots . (5)$$

oder wenn man $p = 1 - q$ setzt, folgt, dass

$$\sum_{o}^{b-2} \left\{\binom{a+i-1}{i} - \binom{a+i}{i} p\right\} q^i = \sum_{o}^{b-2} \left[\left\{\binom{a+i-1}{i} - \binom{a+i}{i}\right\} q^i + \binom{a+i}{i} q^{i+1}\right]$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (3) folgt dann

$$\sum_{o}^{b-2} \left\{\binom{a+i-1}{i} - \binom{a+i}{i} p\right\} q^i = \sum_{1}^{b-2} - \binom{a+i-1}{i-1} q^i + \sum_{o}^{b-2} \binom{a+i}{i} q^{i+1}$$

$$= -\sum_{o}^{b-3} \binom{a+i'}{i'} q^{i'+1} + \sum_{o}^{b-2} \binom{a+i}{i} q^{i+1}$$

wenn man wieder in der ersten Summe $i' = i - 1$ setzt. Scheidet man aus der zweiten Summe das Glied für $i = b - 2$ aus, so dass sie nur bis $b - 3$ geht, so folgt

$$\sum_{o}^{b-2} \left\{\binom{a+i-1}{i} - \binom{a+i}{i} p\right\} q^i = -\sum_{o}^{b-3} \binom{a+i}{i} q^{i+1} + \sum_{o}^{b-3} \binom{a+i}{i} q^{i+1} + \binom{a+b-2}{b-2} q^{b-1}$$

$$= q^{b-1} \binom{a+b-2}{b-2}$$

indem die beiden Summen rechts sich wegheben. Es übergeht also die Gleichung (5) durch Einführung dieses Wertes in

$$f\ (a,\ b) - f\ (a+1,\ b-1) = p^a q^{b-1} \binom{a+b-2}{b-1} + p^a q^{b-1} \binom{a+b-2}{b-2}$$

$$= p^a q^{b-1} \left\{\binom{a+b-2}{b-1} + \binom{a+b-2}{b-2}\right\}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (3) wird

$$f\ (a,\ b) - f\ (a+1,\ b-1) = p^a p^{b-1} \binom{a+b-1}{b-1};$$

also übergeht die Gleichung (4) in

$$f\ (a+1,\ b) = f\ (a,\ b) - \binom{a+b-1}{b-1} p^a q^b \quad \ldots . . (6)$$

Die Umgestaltung von $f'\ (a+1,\ b)$ ergibt sich leichter. Es ist nämlich, wenn man nach Gleichung (2) das Glied für $i = a$ ausscheidet

$$f'\ (a+1,\ b) = p^a q^b \binom{a+b-1}{a} + q^b \sum_{i=o}^{i=a-1} \binom{b+i-1}{i} p^i$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (1)

$$f'\ (a+1,\ b) = f'\ (a,\ b) + \binom{a+b-1}{b-1} p^a q^b \quad \ldots \ldots (7)$$

da ja

$$\binom{a+b-1}{a} = \binom{a+b-1}{b-1}$$

ist (vergl. Formel a').

Durch Addition der Gleichungen (6) und (7) folgt nun

$$f(a+1, b) + f'(a+1, b) = f(a, b) + f'(a, b) \quad \ldots (8)$$

Setzt man daher

$$f(a, b) + f'(a, b) = C$$

so kann C von a nicht abhängen, da es sich bei der Vermehrung von a um 1 nach Gleichung (8) nicht ändert, also auch bei beliebigem a denselben Wert behält. Es ist daher auch

$$C = f(1, b) + f'(1, b)$$

und da

$$f(1, b) = p\,[1 + q + q^2 + \ldots q^{b-1}]$$
$$= p\,\frac{1-q^b}{1-q}$$
$$= 1 - q^b$$
$$f'(1, b) = q^b$$

ist, so folgt

$$C = f(1, b) + f'(1, b) = 1$$

also auch

$$f(a, b) + f'(a, b) = 1$$

oder

$$w + w' = 1$$

w. z. B. w.

Erkl. 28. Dass die Summe

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{b-1} = \frac{1-q^b}{1-q}$$

ist wird in dem Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln der Kleyer'schen Encyklopädie bewiesen.

Aufgabe 77. Der Banquier im Pharaospiele hält a Karten in der Hand, unter welchen sich n Karten des Spielers ($n = 1, 2, 3, 4$) vorfinden, die noch nicht gezogen wurden. Es soll die Wahrscheinlichkeit p gefunden werden, dass zwei der Karten des Spielers in dem 1ten oder 2ten oder ... r^{ten} Abzuge erscheinen?

Erkl. 29. Das Pharaospiel hat folgende Regeln:
Der Banquier hält mit 52 Karten Bank. Er legt nach und nach alle Karten auf den Tisch und zwar je eine zur rechten und zur linken Hand. Ein solches Paar heisst Abzug (Taille) oder Stich. Vor Beginn des Spieles, sowie nach jedem Abzug steht es dem Spieler frei eine oder mehrere Karten (Ass, Dame) zu bezeichnen und auf dieselben eine gewisse Summe setzen. Der Banquier gewinnt den Einsatz des Spielers, wenn die vom Letzteren bezeichnete Karte auf der rechten Seite also an ungerader Stelle erscheint. Der Banquier zahlt aber dem Spieler eine dem Einsatze gleiche Summe, wenn die Karte des Spielers zur Linken oder an gerader Stelle erscheint. Hiedurch sind Spieler und Banquier gleich gestellt. Dagegen hat der Banquier im Folgenden einen Vorteil gegen den Spieler, indem er den halben Einsatz des Spielers einzieht, wenn die vom letzteren bezeichnete Karte in demselben Stich zweimal, also an gerader und

Auflösung. Ist p_i die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Karten des Spielers im i^{ten} Abzug sich vorfinden, so ist

$$p = \sum_{i=1}^{i=r} p_i$$

Um p_i zu berechnen, bemerke man, dass p_i die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist aus den beiden Wahrscheinlichkeiten w_1, dass die bezeichneten Karten des Spielers nicht im 1ten, 2ten ... $(i-1)^{\text{ten}}$ Abzuge auftreten, und aus der Wahrscheinlichkeit, dass im i^{ten} Abzuge sich 2 derselben befinden.

Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den n Karten im 1ten Abzuge keine sich befindet, also es weder die erste noch die zweite abgezogene Karte ist

$$= \left(\frac{a-n}{a}\right)\left(\frac{a-1-n}{a-1}\right)$$
$$= \left(1-\frac{n}{a}\right)\left(1-\frac{n}{a-1}\right)$$

d. h. das Produkt aus den Wahrscheinlich-

ungerader Stelle erscheint, erscheint aber die Karte des Spielers als letzte, so zahlt der Banquier dem Spieler nichts. Der Banquier kann also im letzten Stiche den Einsatz des Spielers gewinnen, kann aber nichts verlieren. Das Spiel endet, entweder sobald der Spieler gewinnt, oder sobald in einem Abzug zwei seiner Karten erscheinen, oder sobald alle Blätter aufgelegt wurden.

keiten, dass die Karte weder im ersten noch im zweiten, bei welchem sich nur mehr $(a-1)$ Karten in der Hand des Banquiers befinden abgezogen wird.

Die Wahrscheinlichkeit, dass im zweiten Abzuge keine der n Karten erscheint ist analog

$$=\left(1-\frac{n}{a-2}\right)\left(1-\frac{n}{a-3}\right)$$

u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit, dass im $(i-1)^{\text{ten}}$ Abzuge keine der n Karten erscheint, ist, da der Banquier nur noch

$$a-2(i-2)=a-2i+4$$

Karten in der Hand hat:

$$=\left(1-\frac{n}{a-2i+4}\right)\left(1-\frac{n}{a-2i+3}\right)$$

Mithin ist die Wahrscheinlichkeit w_1, dass die bezeichneten Karten weder im 1ten noch im 2ten noch ... $(i-1)^{\text{ten}}$ Abzuge erscheinen nach Formel (5')

$$w_1=\left(1-\frac{n}{a}\right)\left(1-\frac{n}{a-1}\right)\left(1-\frac{n}{a-2}\right)\left(1-\frac{n}{a-3}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{a-2i+4}\right)\left(1-\frac{1}{a-2i+3}\right)$$

Zur Bestimmung von w_2 bemerken wir, dass der Banquier noch

$$a-2(i-1)=a-2i+2$$

Karten in der Hand hat, die sich zu

$$\frac{1}{2}(a-2i+2)(a-2i+1)$$

Paaren anordnen lassen, unter denen aber nur

$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

Paare aus den n bezeichneten Karten des Spielers sich vorfinden. Die Wahrscheinlichkeit also, dass ein Paar Karten des Spielers im i^{ten} Abzuge erscheint, ist mithin

$$w_2=\frac{n(n-1)}{(a-2i+2)(a-2i+1)}$$

und daher

$$p_i=w_i\,w_2$$

oder

$$p_i=\frac{n(n-1)}{(a-2i+2)(a-2i+1)}\left(1-\frac{n}{a-1}\right)\left(1-\frac{n}{a-2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{a-2i+4}\right)\left(1-\frac{n}{a-2i+3}\right)$$

Es ergibt sich daher

$$p=\sum_{i=1}^{i=r}\frac{n(n-1)}{(a-2i+2)(a-2i+1)}\left(1-\frac{n}{a}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{a-2i+3}\right)$$

Da:

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{n}{a-1}\right)\left(1-\frac{n}{a-2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{a-2i+3}\right)$$

$$=\frac{(a-n)(a-n-1)\ldots\ldots(a-n-2(i-1)+1)}{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-2i+3)}$$

ist, so kann auch gesetzt werden:

$$p = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{n(n-1)\ (a-n)\ (a-n-1)\ (a-n-2) \ldots . (a-n-2\,i+3)}{a(a-1)\ (a-2) \ldots .. (a-2\,i+3)\ (a-2\,i+2)\ (a-2\,i+1)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{a(a-1)} \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\dfrac{(a-n)\ (a-n-1) \ldots \ldots (a-n-2\,(i-1)+1)}{1.\ 2. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .2\,(i-1)}}{\dfrac{(a-2)\ (a-3) \ldots \ldots \ldots . (a-2\,i+1)}{1.\ \ 2. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 2\,(i-1)}}$$

also

$$p = \frac{n(n-1)}{a(a-1)} \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\binom{a-n}{2\,i-2}}{\binom{a-2}{2\,i-2}}.$$

Aufgabe 78. Eine Urne enthält a weisse, b schwarze Kugeln, man macht m Züge hintereinander, wobei die gezogene Kugel jedesmal wieder zurückgelegt wird, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass man wenigstens $m-k$ weisse, also höchstens k schwarze Kugeln gezogen hat?

Auflösung. Wir setzen

$$p = \frac{a}{a+b} \qquad q = \frac{b}{a+b}$$

dann ist p die Wahrscheinlichkeit bei irgend einem der m Züge eine weisse und q die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen. Es können nun folgende Fälle eintreten:

1. Man zieht in allen m Zügen weisse Kugeln, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist nach Formel 8

$$w_1 = p^m$$

2. Man zieht $(m-1)$ weisse und 1 schwarze Kugel. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$w_2 = \binom{m}{1} p^{m-1} q$$

3. Man zieht $(m-2)$ weisse und 2 schwarze Kugeln, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$w_3 = \binom{m}{2} p^{m-1} q^2$$

u. s. w. bis

$m-k$

Man zieht $(m-k)$ weisse und k schwarze Kugeln, die Wahrscheinlichkeit ist

$$w_{m-k} = \binom{m}{k} p^{m-k} p^k$$

Da nun in jedem dieser Fälle wenigstens $(m-k)$ weisse Kugeln erscheinen, so ist nach Formel 3' die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = w_1 + w_2 + \ldots . + w_{m-k}$$

oder

$$w = p^m + \binom{m}{1} p^{m-1} q + \binom{m}{2} p^{m-2} q^2 + \ldots \binom{m}{k} p^{m-k} q^k.$$

Aufgabe 79. Eine Urne enthält a weisse, b schwarze Kugeln, es werden m Züge gemacht, wobei jedesmal die Kugel zurückgelegt wird. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 1 der gezogenen Kugeln eine weisse ist?

Auflösung. Setzt man

$$p = \frac{a}{a+b} \qquad q = \frac{b}{a+b}$$

so wird nach voriger Aufgabe

$$w = p^m + \binom{m}{1} p^{m-1} q + \ldots + p q^{m-1}$$

beachtet man, dass

$$(p+q)^m = p^m + \binom{m}{1} p^{m-1} q + \ldots + p q^{m-1} + q^m = 1$$

ist, so folgt

$$w = 1 - q^m$$

was man auch direkt finden kann. Denn die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass unter den m Kugeln lauter schwarze sind, ist:

$$w' = q^m$$

also ist

$$w = 1 - w' = 1 - q^m.$$

Führt man die Zahlen a und b ein, so ist:

$$w = 1 - \frac{b^m}{(a+b)^m}.$$

Aufgabe 80. Eine Urne enthält 12 weisse und 24 schwarze Kugeln, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Zügen wenigstens eine weisse Kugel erscheint?

Auflösung. Nach der vorhergehenden Aufgabe folgt

$$w = 1 - \left(\frac{24}{36}\right)^{10}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

Berechnung von $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}8239087 - 1$$
$$\log\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0{,}239087 - 2$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0{,}01734$$

Es ist mithin

$$w = 0{,}98266$$

Aufgabe 81. Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit eine weisse Kugel zu ziehen ist p. Es werden Kugeln gezogen, die immer wieder zurückgelegt werden. Wie viel Züge muss man machen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens eine weisse Kugel erscheint, den Wert A erhält?

Auflösung. Setzt man

$$q = 1 - p$$

so wird nach Aufgabe 79 nach x Zügen die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine weisse Kugel erscheint:

$$w = 1 - q^x$$

sein soll nun diese Wahrscheinlichkeit den Wert A haben, so folgt für die Bestimmung von x die Gleichung

$$A = 1 - q^x$$

also

$$q^x = 1 - A$$

$$x \log q = \log (1 - A)$$

daher

$$x = \frac{\log (1-A)}{\log (1-p}$$

Aufgabe 82. In wie viel Würfen mit 2 Würfeln wird die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Pasch, z. B. 6, 6, wenigstens einmal zu werfen, den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen?

Erkl. 30. Diese Aufgabe wurde Pascal vom Chevalier de Méré vorgelegt, welcher sie dahin löste, dass bei 25 Würfen die Wahrscheinlichkeit grösser als $\frac{1}{2}$ ist, während bei 24 Würfen die Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Was auch unsere Rechnung bestätigt.

Nebenrechnung:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\left.\begin{array}{l}\log 36 = 1{,}5563025 \\ \log 35 = 3{,}5440680\end{array}\right\} -$$

$$\log \frac{36}{35} = 0{,}0122345$$

$$\left.\begin{array}{l}\log (\log 2) = 0{,}4786098 - 1 \\ \log\left(\log \frac{36}{35}\right) = 0{,}0875862 - 2\end{array}\right\} -$$

$$1{,}3910236$$

$$x = 24{,}605$$

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln einen bestimmten Pasch zu werfen ist, da es 36 verschiedene Würfe gibt

$$p = \frac{1}{36}$$

also

$$q = \frac{35}{36}$$

Für die Anzahl x der Würfe, in denen wenigstens einmal der bestimmte Pasch geworfen wird folgt die Wahrscheinlichkeit nach Aufgabe 81

$$w = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^x$$

soll diese den Wert $\frac{1}{2}$ haben, so muss

$$\frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^x$$

also

$$x \log \frac{35}{36} = \log \frac{1}{2}$$

oder

$$x = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35}$$

$$= \frac{0{,}3010300}{0{,}0123345}$$

also nach nebenstehender Rechnung

$$x = 24{,}605$$

d. h. bei 25 Würfen ist Wahrscheinlichkeit den Pasch 6, 6 zu werfen grösser als $\frac{1}{2}$, bei 24 Würfeln aber kleiner als $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 83. Eine Urne enthält schwarze und weisse Kugeln, im ganzen s Kugeln. Wie viel von jeder Sorte muss sie enthalten, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach m Zügen wenigstens eine weisse Kugel erscheint, den Wert A besitzt?

Auflösung. Die Urne möge a weisse und b schwarze Kugeln enthalten, dann ist

$$a + b = s$$

und die Wahrscheinlichkeit eine weisse Kuge zu ziehen

$$p = \frac{a}{s}$$

die Wahrscheinlichkeit eine schwarze zu ziehen

$$q = \frac{b}{s}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach m Ziehungen wenigstens eine weisse erscheint ist $1 - q^m$, also erhält man zur Bestimmung von b die Gleichung:

$$A = 1 - \frac{b^m}{s^m}$$

oder

$$b^m = s^m(1-A)$$

also

$$b = s\sqrt[m]{(1-A)}$$

daher

$$a = s - b = \left(1 - \sqrt[m]{1-A}\right)$$

Erkl. 31. Wenn sich für b keine ganze Zahl ergibt, so ist die nächst grössere oder nächst kleinere zu nehmen. Später wird auf solche Fälle noch wiederholt aufmerksam gemacht werden.

Aufgabe 84. In welchem Verhältnis muss eine Urne schwarze und weisse Kugeln enthalten, damit die Wahrscheinlichkeit, dass nach 15 Zügen wenigstens 1 weisse Kugel erscheint, den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt?

Auflösung. Nennt man s die unbestimmte Anzahl der Kugeln, so wird nach Aufgabe 83 die Anzahl der schwarzen Kugeln

$$b = s\sqrt[m]{1-A}$$

die Anzahl der weissen

$$a = s\left(1 - \sqrt[m]{1-A}\right)$$

Daher das Verhältnis

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[m]{1-A}}{1 - \sqrt[m]{1-A}}$$

Setzt man hierin noch $m = 15$, $A = \frac{1}{2}$ so folgt

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt[15]{2} - 1}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{0{,}047} = \frac{1000}{47}$$

Es sind also auf je 1000 schwarze 47 weisse Kugeln nötig.

Nebenrechnung:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log \sqrt[15]{2} = 0{,}0200686$$

$$\sqrt[15]{2} = 1{,}047$$

Aufgabe 85. Eine Urne enthält a weisse, b schwarze und c rote Kugeln. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei m Zügen wenigstens $m - k$ weisse Kugeln erscheinen? Nach jedem Zuge wird die Kugel zurückgelegt.

Auflösung. Setzt man

$$p = \frac{a}{a+b+c}$$

$$q = \frac{b}{a+b+c}$$

$$r = \frac{c}{a+b+c}$$

so sind p, q, r die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weissen, schwarzen resp. roten Kugel. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen oder roten Kugel ist dann nach Formel 3:

$$p_1 = q + r = 1 - p$$

Nun sollen wenigstens $m - k$ weisse Kugeln erscheinen, also höchstens k **nicht weisse**, d. h. schwarze oder rote. Nach Aufgabe 78 folgt also die Wahrscheinlichkeit

$$w = p^m + \binom{m}{1} p^{m-1} p_1 + \binom{m}{2} p^{m-1} p_1^2 + \cdot \binom{m}{k} p^{m-k} p_1^k$$

oder

$$w = p^m + \binom{m}{1} p^{m-1}(q+r) + \binom{m}{2} p^{m-2}(q+r)^2 + \ldots + \binom{m}{k} p^{m-k}(q+r)^k$$

Aufgabe 86. Eine Urne enthält a weisse, b schwarze, c rote Kugeln. Es werden 10 Züge gemacht, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 1 weisse, 2 schwarze und 3 rote Kugeln erscheinen? Nach jedem Zuge wird die Kugel zurückgelegt.

Auflösung. Bezeichnen wir mit p, q, r die Wahrscheinlichkeiten eine weisse, schwarze resp. rote Kugel zu ziehen, so wird

$$p = \frac{a}{a+b+b}$$

$$q = \frac{b}{a+b+c}$$

$$r = \frac{c}{a+b+c}$$

und nach Formel 11 wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 10 Zügen k weisse, l schwarze und n rote Kugeln erscheinen:

$$w_{k,l,n} = \frac{10!}{k!\,l!\,n!} p^k q^l r^n$$

$$k + l + n = 10$$

und der Aufgabe zufolge muss

$$k \geqq 1 \quad l \geqq 2 \quad n \geqq 3$$

sein. Jede Zerlegung der Zahl 10 in solche drei Summanden k, l, n wird also eine Möglichkeit für das gewünschte Ereignis geben. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird mithin die Summe aller der Wahrscheinlichkeiten $w_{k,l,n}$ sein, die sich für die einzelnen Fälle ergeben.

Die Zerlegung ist nun möglich auf nachstehende Arten:

$$k = 1 \begin{cases} l = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \\ n = 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3 \end{cases}$$

$$k = 2 \begin{cases} l = 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ n = 6,\ 5,\ 4,\ 3 \end{cases}$$

$$k = 3 \begin{cases} l = 2,\ 3,\ 4 \\ n = 5,\ 4,\ 3 \end{cases}$$

$$k = 4 \begin{cases} l = 2,\ 3 \\ n = 4,\ 3 \end{cases}$$

$$k = 5 \begin{cases} l = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Mithin wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit w sich ergeben:

$$w = w_{1,2,7} + w_{1,3,6} + w_{1,4,5} + w_{1,5,4} + w_{1,6,3} + w_{2,2,6} + w_{2,3,5} + w_{2,4,4} + w_{2,5,3} + w_{3,2,5} + w_{3,3,4} + w_{3,4,3} + w_{4,2,4} + w_{4,3,3} + w_{5,2,3}$$

oder es ist:

$$w = \frac{10!}{1!\,2!\,7!} p\, q^2 r^7 + \frac{10!}{1!\,3!\,6!} p\, q^3 r^6 + \frac{10!}{1!\,4!\,5!} p\, q^4 r^5 + \frac{10!}{1!\,5!\,4!} p\, q^5 r^4 + \frac{10!}{1!\,6!\,3!} p\, q^6 r^3$$
$$+ \frac{10!}{2!\,2!\,6!} p^2 q^2 r^6 + \frac{10!}{2!\,3!\,5!} p^2 q^3 r^5 + \frac{10!}{2!\,4!\,4!} p^2 q^4 r^4 + \frac{10!}{2!\,5!\,3!} p^2 q^5 r^3 + \frac{10!}{3!\,2!\,5!} p^3 q^2 r^5$$
$$+ \frac{20!}{3!\,3!\,4!} p^3 q^3 r^4 + \frac{10!}{3!\,4!\,3!} p^3 q^4 r^3 + \frac{10!}{4!\,2!\,4!} p^4 q^2 r^4 + \frac{10!}{4!\,3!\,3!} p^4 q^3 r^3 + \frac{10!}{5!\,2!\,3!} p^5 q^2 r^3$$

Aufgabe 87. Zwei Personen A und B spielen eine Partie, in welcher A die Wahrscheinlichkeit p besitzt einen Stich zu gewinnen, B die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von m gespielten Partien A nicht weniger als $m - n$ und nicht mehr als $m - k$ gewinnt? ($n > k$) Oder auch, dass B höchstens n und wenigstens k der Partien gewinnt, also A soviele verliert?

Auflösung. Da A nicht weniger als $m - n$ Partien gewinnen soll, so kann er $m - n$, $m - n + 1$, $m - n + 2$ ... bis $m - k$ Partien gewinnen. Jeder dieser Fälle ist günstig für das erwartete Ereignis, dass A nicht weniger als $m - n$ und nicht mehr als $m - k$ Partien gewinnt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also nach Formel 3' die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Fälle. Nach Formel 8 sind aber die Wahrscheinlichkeiten:

$$w_i = \binom{m}{n-i} p^{m-n+i} q^{n-i}$$

für i gesetzt $0, 1, 2, \ldots . n - k$

Daher ist:

$$w = \sum_{i=0}^{i=n-k} \binom{m}{n-i} p^{m-n+i} q^{n-i}$$

Aufgabe 88. Welches ist die Wahrscheinlichkeit bei 10 Würfen mit einem Würfel wenigstens 2 mal und höchstens 5 mal die „6“ zu werfen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf die 6 zu werfen ist $p = \frac{1}{6}$, also $q = \frac{5}{6}$, daher ist nach vorhergehender Auf-

gabe, die Wahrscheinlichkeit in 10 Würfen die „6" wenigstens 10—8=2 mal und höchstens 10—5=5 mal zu werfen?

$$w = \binom{10}{8} p^2 q^8 + \binom{10}{7} p^3 q^7 + \binom{10}{6} p^4 q^6 + \binom{10}{5} p^5 q^5$$

$$= \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 + \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6 + \binom{10}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6\left[\frac{10.9}{1.2}\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{10.9.8}{1.2.3}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} + \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}\left(\frac{1}{6}\right)^3\right]$$

$$= 45.\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\left[\frac{125}{216} + \frac{8}{3}\,\frac{25}{216} + \frac{14}{3}\,\frac{5}{216} + \frac{28}{5}\,\frac{1}{216}\right]$$

$$= \frac{1}{72}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 3253$$

$$= \frac{3125\,.\,3253}{72\,.\,6^7}$$

$$= 0{,}5046$$

Nebenrechnung:

$\log 3125 = 3{,}4948500$
$\log 3253 = 3{,}5122841$ +
$7{,}0071341$
$\log 72.6^7 = 7{,}3041916$ —
$0{,}7029425-1$
$0{,}5046$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also nahezu $\frac{1}{2}$

Aufgabe 89. Eine Urne enthält 2 weisse und 3 schwarze Kugeln. Es werden 500 Züge gemacht, welches ist die wahrscheinlichste Anzahl weisser Kugeln, die gezogen werden?

Auflösung. Nach Frage 15 ist diese Anzahl gegeben durch

$$m-k:k = p:q$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel

$$p = \frac{2}{5} \quad \text{also} \quad q = \frac{3}{5}$$

Für die Anzahl k schwarzer Kugeln folgt also die Proportion:

$$500-k:k = 2:3$$

also

$$k = 300$$
$$m-k = 200$$

d. h. die grösste Wahrscheinlichkeit ist für das Ziehen von 200 weissen und 300 schwarzen Kugeln. Und zwar ist diese Wahrscheinlichkeit

Erkl. 32. Für die Berechnung der Faktoriellen 500! 200! 300! siehe den Anhang wo die Formel bewiesen wird:

Formel f: $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

Diese Formel heisst Stirling'sche Formel. π ist die Ludolf'sche Zahl und e die Basis der natürlichen Logarithmen.

$$w = \frac{500!}{200!\;300!}\left(\frac{2}{5}\right)^{200}\left(\frac{3}{5}\right)^{300} \quad \text{nach nebenstehender Erklärung}$$

$$= \frac{500^{500}\,e^{-500}\sqrt{2\pi.500}}{200^{200}\,e^{-200}\sqrt{2\pi 200}\,.\,300^{300}\,e^{-300}\sqrt{2\pi 300}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{200}\left(\frac{3}{5}\right)^{300}$$

$$= \frac{500^{500}\quad\sqrt{5}}{200^{200}\,.\,300^{300}\,.\,10\sqrt{12\pi}}\left(\frac{2}{5}\right)^{200}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{300}$$

$$= \frac{5^{500} . 100^{500} . \sqrt{5}}{2^{200} . 100^{200} . 3^{300} . 100^{300} . 10\sqrt{12\pi}} \cdot \frac{2^{200} . 3^{300}}{5^{500}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10 \sqrt{12\pi}}$$

$$= 0{,}03644$$

Aufgabe 90. Eine Urne enthält 7 weisse und 3 schwarze Kugeln, man zieht 1111 Kugeln, welches ist die wahrscheinlichste Anzahl weisser und schwarzer Kugeln, die gezogen werden dürfte?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel ist

$$p = \frac{7}{10} \quad \text{also} \quad q = \frac{3}{10}$$

daher bestimmen sich α und β nach Gleichung (3) auf Seite 64 da:

$$1111 . \frac{7}{10} = 778 - \frac{3}{10}$$

$$1111 . \frac{3}{10} = 333 + \frac{3}{10}$$

ist:

$$\alpha = 778$$
$$\beta = 333$$

Es hat also das Ziehen von 778 weissen und 333 schwarzen Kugeln die grösste Wahrscheinlichkeit. Dieselbe ergibt sich

$$w = \frac{1111!}{778!\ 333!} \left(\frac{7}{10}\right)^{778} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{333}$$

$$= \frac{1111^{1111} . \sqrt{2\pi . 1111}}{777^{778} . 333^{333} \sqrt{2\pi . 778} \sqrt{2\pi . 333}} \cdot \frac{7^{778} . 3^{333}}{10^{1111}}$$

$$= (111{,}1)^{1111} . \left(\frac{7}{778}\right)^{778} \cdot \left(\frac{1}{111}\right)^{333} \sqrt{\frac{1111}{2\pi . 778 . 333}}$$

$$= 0{,}02612$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\log 111{,}1 &= 2{,}0457141 \\
\log 1111 &= 3{,}0457141 \\
\log 111 &= 2{,}0453230 \\
\log 778 &= 2{,}8909796 \\
\log 333 &= 2{,}5224442 \\
\log 7 &= 0{,}8450980 \\
\log 2\pi &= 0{,}7981799 \\
\hline
1111 \log 111{,}1 &= 2272{,}7883651
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
778 \log \frac{7}{778} &= 0{,}3041152 - 1592 \\
331 \log \frac{1}{111} &= 0{,}9074410 - 682 \\
\log \sqrt{\frac{1111}{2\pi . 777 . 333}} &= 0{,}4170552 - 2 \\
\hline
\log w &= 0{,}4169765 - 2 \\
w &= 0{,}02612
\end{aligned}$$

Anmerkung 28. Die in den beiden letzten Aufgaben gefundenen Wahrscheinlichkeiten sind an und für sich sehr klein, im Verhältnis aber zu den Wahrscheinlichkeiten der übrigen Kombinationen von weissen und schwarzen Kugeln sehr gross. Wir fanden in Aufgabe 89, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von 200 weissen und 300 schwarzen Kugeln aus der Urne die 2 weisse und 3 schwarze enthält den Wert $w = 0{,}03644$ hat. Suchen wir einmal den Wert der Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den 500 Zügen 100 weisse und 400 schwarze erscheinen, so ist derselbe nach Formel 8

$$w_1 = \binom{500}{100}\left(\frac{2}{5}\right)^{100}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{400}$$

$$= \frac{500^{500}.\sqrt{2\pi\,.\,500}}{100^{100}.\,400^{400}\sqrt{2\pi\,.\,100}\sqrt{2\pi\,.\,400}}\cdot\frac{2^{100}.\,3^{400}}{5^{500}}$$

$$= \left(\frac{1}{50}\right)^{100}\left(\frac{3}{4}\right)^{400}\cdot\frac{100^{100}}{10}\sqrt{\frac{5}{8\pi}}$$

und es ist:

$$\log\left(\frac{1}{50}\right)^{100} = 0{,}1030000 - 170$$

$$\log\left(\frac{3}{4}\right)^{400} = 0{,}9845200 - 51$$

$$\log\frac{1}{10}\sqrt{\frac{5}{8\pi}} = 0{,}6493651 - 2$$

$$\log 100^{100} = 200,$$

$$\log w_1 = 0{,}7368851 - 22$$

oder

$$\log\frac{1}{w_1} = 21{,}2631149$$

$$\frac{1}{w_1} = 10^{21,3}$$

$$w_1 = \frac{1}{10^{21,3}}$$

Es ist also w_1 ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine 22 zifferige Zahl ist. Von der Grösse dieser Zahl, also der Kleinheit von w_1 kann man sich kaum einen Begriff machen. Würde man aus einer Urne Kugeln ziehen mit einer solchen Geschwindigkeit, dass man 10 Millionen Kugeln in der Sekunde zieht, so müsste man 10 Millionen Jahre hindurch ziehen, damit die Anzahl Kugeln durch eine 22 zifferige Zahl ausgedrückt wird.

Das Jahr hat nämlich $10^{7,5}$ Sekunden, also werden in einem Jahre $10^7 \times 10^{7,5} = 10^{14,5}$ Kugeln gezogen, da in einer Sekunde 10^7 Kugeln gezogen werden. In 10^7 Jahren werden daher $10^{14,5}\,.\,10^7 = 10^{21,5}$ Kugeln gezogen, was eine 22 zifferige Zahl darstellt.

Würde man gar die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen wollen, dass in den 500 Zügen lauter weisse Kugeln erscheinen, die sich dann gleich

$$w_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^{500}$$

ergibt also

$$\log w_2 = 0{,}03 - 199$$

$$\log\frac{1}{w_2} = 198{,}97$$

$$\frac{1}{w_2} = 10^{198,9}$$

$$w_2 = \frac{1}{10^{198,9}}.$$

Es ist daher w_2 ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine 199 zifferige Zahl ist. Da

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{10^{21,3}}{10^{198,9}} = \frac{1}{10^{777,6}}$$

ist, so ist

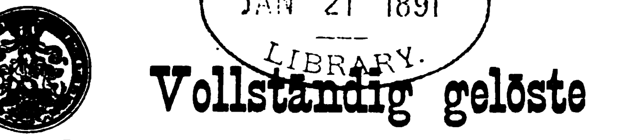
$$w_1 = w_2\,.\,10^{177,6}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

812. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Erster Teil.
Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.
Forts. v. Heft 803. — Seite 97—112.
Mit 1 Figur.




Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 803. — Seite 97—112. Mit 1 Figur.

Inhalt:

Aufgaben. — Ungelöste Aufgaben. — Ueber das Theorem von Jaques Bernoulli. — Beweis des Bernoullischen Theorems.

Stuttgart 1890.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Mil[illegible] etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergess[illegible]n mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Be[illegible] zweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleih[illegible]d somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen [illegible]

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische [illegible] gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der [illegible] verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Ve[illegible] Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird de[illegible] thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshan[illegible]**

d. h. w_2 muss mit einer 178 zifferigen Zahl multipliziert werden, um den Wert w_1 zu geben und da $w = \frac{1}{10^{2,4}}$, so ist

$$\frac{w}{w_1} = \frac{10^{21,3}}{10^{2,4}} = 10^{19,7}$$

also

$$w = w_1 \,.\, 10^{19,7}$$

d. h. w_1 muss mit einer 20 zifferigen, also w_2 mit einer 198 zifferigen Zahl multipliziert werden, um den Wert w zu geben. Man sieht hieraus deutlich, wie ungeheuer gross w im Verhältnis zu w_1 oder gar w_2 ist.

Aufgabe 91. Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln in gleicher Anzahl, man macht 1000 Züge aus derselben und legt die Kugel jedesmal zurück, nachdem man sich ihre Farbe notiert hat. Welches sind die relativen Wahrscheinlichkeiten dafür, dass unter den gezogenen Kugeln sich

1. 500 weisse und 500 schwarze
2. 510 „ „ 490 „
3. 520 „ „ 480 „
4. 550 „ „ 450 „
5. 600 „ „ 400 „

befinden?

Auflösung. Wir wenden die Formel 10 an, indem wir:

$$p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2},\ \frac{x}{\triangle x} = n$$

setzen liefert dieselbe:

$$w = 0{,}094661 \,.\, \eta$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\xi^2}$$

$$\xi = \frac{n}{10\sqrt{5}}$$

also zufolge der Tafel I, wenn wir der Reihe nach setzen:

$n = o,\quad \xi = 0 \quad w = 0{,}094661 \,.\, 0{,}56419 = 0{,}05341$

$n = 10 \quad \xi = 0{,}4 \quad w = 0{,}094661 \,.\, 0{,}48077 = 0{,}04551$

$n = 20 \quad \xi = 0{,}9 \quad w = 0{,}094661 \,.\, 0{,}25098 = 0{,}02376$

$n = 50 \quad \xi = 2{,}2 \quad w = 0{,}094661 \,.\, 0{,}00446 = 0{,}00042$

$n = 100 \quad \xi = 4{,}5 \quad w = 0{,}094661 \,.\, 0{,}00000 = 0{,}00000$

Die letzte Wahrscheinlichkeit würde noch in der 7ten Dezimalstelle keine giltige Ziffer aufweisen.

Aufgabe 92. Aus einer Urne, welche gleich viel weisse und schwarze Kugeln enthält werden 20 Züge gemacht, nach jedem Zuge wird die Kugel wieder zurückgelegt. Es sind die relativen Wahrscheinlichkeiten zu vergleichen, welche sich für die einzelnen Kombinationen von weissen und schwarzen Kugeln nach Formel 8 und 10 ergeben.

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, ist

$$p = \frac{1}{2} \text{ also ist } q = \frac{1}{2}.$$

Setzt man

$$(1+1)^{20} = y_0 + y_1 + \cdots + y_9 + y_{10} + y_{11} + \cdots y_{20}$$

so ist nach Formel 8

$$w_i = \frac{y_i}{2^{20}} = \frac{1}{2^{20}} \frac{20!}{(20-\iota)!\, i!}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 20 Kugeln $20 - i$ weisse und i schwarze sind.

Nach Frage 15 ist aber das Maximalglied unter den y_i das Glied

$$y_{10} = \binom{20}{10} = \frac{20!}{10!\,10!} = 184756$$

und wir bezeichnen mit w_n die Wahrscheinlichkeit derjenigen Kombination, die um n schwarze Kugeln mehr hat als diejenige, der das Maximalglied entspricht, so dass

$$w_n = \frac{y_{10+n}}{2_{20}}$$

ist.

Nun gibt die Formel 10, wenn mit A eine Konstante bezeichnet wird

$$W = A e^{-\xi^2}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2pq}} \cdot \frac{x}{\triangle x \sqrt{m}}$$

wobei

$$p = q = \frac{1}{2}, \quad m = 20$$

zu setzen ist. Hiebei bezeichnet $\frac{x}{\triangle x}$ die Anzahl wie vielmal das Ereignis öfters eintritt als der grössten relativen Wahrscheinlichkeit entsprechen würde, d. h. es ist

$$\frac{x}{\triangle x} = n$$

der früheren Formel zu setzen, wenn W sich auf dieselbe Kombination beziehen soll, wie w_n wir erhalten daher, da

$$\xi = \frac{n}{\sqrt{10}}$$

wird

$$W_n = A e^{-\frac{n^2}{10}}$$

Sollen nun W_n, welches nur relative Werte sind und w_n verglichen werden, so müssen wir eine Vergleichseinheit wählen. Wir wollen zu dem Zwecke A so wählen, dass

$$W_0 = w_0$$

ist, d. h. wir setzen

$$A = \frac{y_{10}}{2^{20}} = \frac{184756}{2^{20}};$$

so dass nun

$$W_n = \frac{184756}{2^{20}} e^{-\frac{n^2}{10}}$$

und

$$w_n = \frac{y_{10+n}}{2^{20}} = \frac{1}{2^{20}} \cdot \frac{20!}{(10+n)!\,(10-n)!}$$

wird.

Setzt man

$$w_n \cdot 2^{20} = y_n \quad \text{und} \quad W_n\, 2^{20} = Y_n$$

und berechnet die einzelnen Werte, so ergibt vorerst:

$$\begin{aligned} y_0 &= 184756 \\ y_1 &= 167960 \\ y_2 &= 125970 \\ y_3 &= 77520 \\ y_4 &= 38760 \\ y_5 &= 15504 \\ y_6 &= 4845 \\ y_7 &= 1140 \\ y_8 &= 190 \\ y_9 &= 20 \\ y_{10} &= 1 \end{aligned}$$

Die Werte

$$Y_n = 184756\, e^{-\frac{n^2}{10}}$$

können wir mittels der Tabelle I berechnen oder auch direkt. Es ist

$$\begin{aligned} \log Y_n &= \log 184756 - \frac{n^2}{10} \log e \\ &= 5{,}2665986 - \frac{n^2}{10}\, 0{,}4342945 \\ &= 5{,}2665986 - n^2\, 0{,}04342945 \end{aligned}$$

	$Y_0 = 184756$
$\log Y_1 = 5{,}2231691$	$Y_1 = 167174$
$\log Y_2 = 5{,}0938808$	$Y_2 = 124134$
$\log Y_3 = 4{,}8757336$	$Y_3 = 75117$
$\log Y_4 = 4{,}5717274$	$Y_4 = 37301$
$\log Y_5 = 4{,}1808603$	$Y_5 = 15165$
$\log Y_6 = 3{,}7031384$	$Y_6 = 5048$
$\log Y_7 = 3{,}1385555$	$Y_7 = 1376$
$\log Y_8 = 2{,}4881138$	$Y_8 = 308$
$\log Y_9 = 1{,}7488132$	$Y_9 = 56$
$\log Y_{10} = 0{,}9236536$	$Y_{10} = 8$

Wir haben also folgende Zusammenstellung:

$y_0 = 184756$	$Y_0 = 184756$
$y_1 = 167960$	$Y_1 = 167174$
$y_2 = 125970$	$Y_2 = 124134$
$y_3 = 77520$	$Y_3 = 75117$
$y_4 = 38760$	$Y_4 = 37301$
$y_5 = 15504$	$Y_5 = 15165$
$y_6 = 4845$	$Y_6 = 5048$
$y_7 = 1140$	$Y_7 = 1376$
$y_8 = 190$	$Y_8 = 308$
$y_9 = 20$	$Y_9 = 56$
$y_{10} = 1$	$Y_{10} = 8$

Es ist mithin

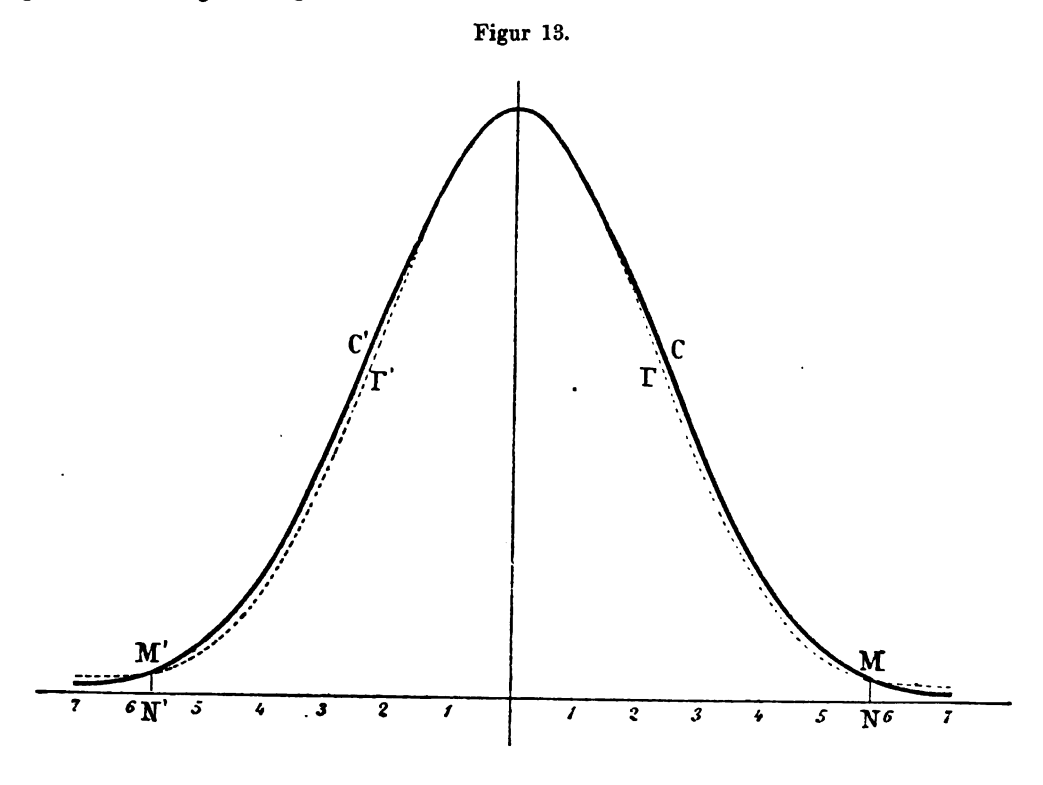
$$y_0 = Y_0,\ y_1 > Y_1,\ y_2 > Y_2,\ y_3 > Y_3,\ y_4 > Y_4 \text{ u. } y_5 > Y_5$$

und zwar sind die e Unterschiede sehr gering im Verhältnis zur Grösse der Zahlen. Dahingegen werden von Y_6 an diese kleiner als die entsprechenden Y und zwar ist diese Ungleichheit zunehmend mit wachsendem Index, so dass schon $Y_9 > 2\, y_9$.

Für kleine Werte von n, d. h. in der Nähe des Maximalgliedes, ist die Übereinstimmung eine hinreichend gute.

Anmerkung 24. Wenn man sich dieses Resultat graphisch vorstellen will, so ergibt sich die folgende Figur.

Figur 13.



Die Curve C enthält die Endpunkte der Ordinaten y und Γ die Endpunkte der Y. Dann verlauft bis M die Curve C über der Curve Γ von M ab unter derselben. Hiebei ist $5 < oN < 6$, wenn oN die Abscisse des Schnittpunktes M beider Curven ist. Man kann hieraus den Schluss ziehen, dass für kleine n und grosse m die Curve C durch die Curve Γ ersetzt werden hann, d. h. dass für grosse m und kleine Werte von n man an Stelle der Formel 8 die Formel 10 setzen kann, wenn man nur die Ordinate für $\xi = o$ gleich der Maximalordinate der Curve macht, die die Formel 8 liefert.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 93. Eine beratende Versammlung besteht aus 512 Personen, von denen 382 der Majorität und 130 der Minorität angehören. Es werden zu einem Ausschusse aus der ganzen Versammlung 25 Mitglieder ausgelost, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Ausschusse sich 15 Mitglieder der Majorität und 10 der Minorität befinden?

Andeutung. Die Auflösung geschieht in Anlehnung an die Aufgabe 71.

Aufgabe 94. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der obigen Auslosung die Majorität im Ausschusse auch durch die Mitglieder der Majorität der ganzen Versammlung vertreten wird?

Andeutung. Hiezu ist notwendig, dass von der Minorität höchstens 12 Mitglieder in den 25gliedrigen Ausschuss eintreten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich dann nach Aufgabe 73.

Aufgabe 95. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Lotterieziehung wenigstens eine zweizifferige Zahl erscheint?

Andeutung. Die Lösung geschieht, wie in Aufgabe 75.

Aufgabe 96. In einer Urne sind 15 weisse, 20 schwarze Kugeln, man zieht 8 Kugeln auf einmal heraus, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter denselben wenigstens 1 weisse ist? Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 1 schwarze unter denselben ist?

Andeutung. Dio Lösung geschieht nach Aufgabe 74.

Aufgabe 97. Eine Urne enthält 12 weisse und 24 schwarze Kugeln, welches ist die relative Wahrscheinlichkeit, dass unter 8 auf einmal herausgezogenen Kugeln wenigstens 1 schwarze ist, gegenüber der, dass unter ihnen wenigstens 1 weisse ist.

Andeutung. Man muss zuerst nach vorhergehender Aufgabe die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass unter den 8 Kugeln wenigstens eine schwarze, resp. eine weisse auftritt, dann bestimmt sich die relative Wahrscheinlichkeit nach Formel 6.

Aufgabe 98. A und B spielen Würfel. Es gewinnt A wenn er 3 mal eine ungerade Ziffer aufwirft, B wenn er 2 mal eine gerade Ziffer wirft. Welches sind die Wahrscheinlichkeiten, dass A resp. B das Spiel gewinnt?

Andeutung. Die Lösung geschieht, nach der Aufgabe 76, wenn man $p = q = \frac{1}{2}$ und $a = 3$ $b = 2$ setzt.

Aufgabe 99. Eine Urne enthält 3 weisse und 2 schwarze Kugeln, es werden 5 Züge gemacht. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens 3 weisse Kugeln erscheinen? Nach jedem Zuge wird die Kugel wieder zurückgelegt.

Andeutung. Die Auflösung ist allgemein in der Aufgabe 78 gegeben:

Aufgabe 100. Zwei Personen A und B spielen mit einander. A hat noch a Stiche B, b Stiche zu machen um das Spiel zu gewinnen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass A resp. B das Spiel gewinnt?

Andeutung. Diese Aufgabe wurde als Aufgabe 76 bereits gelöst. Eine andere Lösung folgt aus Aufgabe 78, wenn man annimmt, dass A und B alle $m = a + b - 1$ Spiele, in denen ihr Spiel beendet sein muss, spielen, und dass A gewinnt, wenn er von diesen m-Spielen wenigstens a gewinnt. B hat dann gewonnen, wenn er von diesen m-Spielen, wenigstens b gewinnt. Die Auflösung hat dann dieselbe Form, wie in Aufgabe 78, wenn $k = a$, resp. $k = b$ gesetzt wird.

Es lassen sich diese gefundenen Werte für die Wahrscheinlichkeiten auch transformieren, in die Werte, die bei der Lösung der Aufgabe 76 gefunden wurden. (Vergleiche Laplace, Théorie analytique des Probabilités, pag 209)

Aufgabe 101. Eine Urne enthält 3 mal soviel weisse als schwarze Kugeln, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 15 Zügen wenigstens 1 weisse Kugel erscheint? Die gezogene Kugel wird nach jedem Zuge zurückgelegt.

Andeutung. Die Lösung geschieht nach Aufgabe 79.

Aufgabe 102. Eine Urne enthält 17 weisse und 21 schwarze Kugeln, wie viel Züge muss man machen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens eine weisse Kugel gezogen wird, den Wert $\frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{99}{100}$ erhält?

Andeutung. Die Lösung ist allgemein in Aufgabe 81 gegeben.

Aufgabe 103. Eine Urne enthält 500 Kugeln. Wie viel weisse und wie viel schwarze Kugeln muss sie enthalten, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in 10 Zügen wenigstens eine weisse Kugel erscheint, den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt?

Andeutung. Die Lösung ist allgemein in Aufgabe 83 gegeben.

Aufgabe 104. Welches ist die Anzahl schwarzer und weisser Kugeln der Aufgabe 103, wenn die Wahrscheinlichkeit die Werte $\frac{3}{4}, \frac{9}{10}, \frac{99}{100}$ annehmen soll?

Aufgabe 105. Eine Urne enthält 5 weisse, 7 schwarze, 9 rote und 11 grüne Kugeln. Welches sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei 5 Zügen wenigstens 3 weisse, 3 schwarze, 3 rote, 3 grüne erscheinen? Nach jedem Zuge wird die gezogene Kugel zurückgelegt.

Andeutung. Die Lösung geschieht, wie in Aufgabe 86.

Aufgabe 106. Eine Urne enthält 5 weisse, 5 schwarze, 5 rote Kugeln, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6 aufeinander folgenden Zügen wenigstens 2 weisse und 1 rote Kugel erscheinen?

Andeutung. Zur Lösung vergleiche die Aufgabe 86.

Aufgabe 107. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine Kugel (Aufgabe 106) jeder Farbe erscheint?

Aufgabe 108. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Zügen wenigstens 3 von jeder Farbe erscheinen? (Aufgabe 106).

Aufgabe 109. In wie viel Würfen mit einem Würfel wird die Wahrscheinlichkeit, die 1 zu werfen, den Wert $\frac{1}{2}$ erhalten?

In wie viel Würfen den Wert $\frac{9}{10}$?

Andeutung. Man verwende hiezu die Formel, welche in Aufgabe 82 angegeben wurde.

Aufgabe 110. In wie viel Würfen mit zwei Würfeln wird die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen?

Andeutung. Vergleiche Erklärung 5 und Aufgabe 82.

Aufgabe 111. In wie viel Würfen mit 2 Würfeln wird die Wahrscheinlichkeit als Summe 8 zu werfen, den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 6.

Aufgabe 112. In wie viel Würfen mit drei Würfeln wird die Wahrscheinlichkeit einen Pasch zu werfen, den Wert $\frac{1}{2}$ erreichen?

Andeutung. Man muss erst die Wahrscheinlichkeit für das Werfen dreier gleicher Ziffern bestimmen.

Aufgabe 113. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, die 2 weisse und 3 schwarze Kugeln enthält in 8 Zügen wenigstens 2 weisse und höchstens 6 weisse Kugeln zu ziehen, wenn die Kugeln nach jedem Zuge zurückgelegt werden?

Andeutung. Die Lösung ist nach Aufgabe 78 zu machen.

Aufgabe 114. Zwei Personen spielen „Kopf und Adler“, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 15 Würfen höchstens 8 mal und wenigstens 3 mal „Adler“ geworfen wird?

Erklärung 33. Das Spiel „Kopf und Adler“ oder auch „Schrift und Wappen“, besteht darin, dass eine Münze in die Höhe geworfen wird und je nachdem die Seite auffällt, welche den Adler oder den Kopf trägt, gewinnt der eine oder der andere der Spieler.

Andeutung. Die Wahrscheinlichkeiten für beide Personen sind hier gleich für jeden Wurf.

Aufgabe 115. Eine Urne enthält 3 weisse und 5 schwarze Kugeln, man macht 1600 Züge, welche Anzahl weisse und schwarze Kugeln haben die grösste Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden? Und wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit?

Andeutung. Vergleiche hiezu die Frage 15 und die Aufgabe 89.

Aufgabe 116. Eine Urne enthält 4 weisse und 7 schwarze Kugeln, man macht 1000 Züge, welche Anzahl weisser und schwarzer Kugeln hat die grösste Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden? Wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 117. Man macht 599 Würfe mit einem Würfel, welche anzahlmal ist es am wahrscheinlichsten, dass die „1“ geworfen wird? Wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 118. Aus einer Urne die 2 weisse, 3 schwarze Kugeln enthält werden 30000 Züge gemacht, welches sind die relativen Wahrscheinlichkeiten, dass:

1. 12000 weisse, 18000 schwarze Kugeln
2. 11988 „ 18012 „ „
3. 11940 „ 18060 „ „
4. 11880 „ 18120 „ „
5. 11760 „ 18240 „ „

gezogen werden?

Andeutung. Es ist die Formel 10 anzuwenden, in welcher

$$p = \frac{2}{5},\quad q = \frac{3}{4},\quad m = 30000$$

und $\frac{x}{\triangle x} = n$ zu setzen ist.

Aufgabe 119. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln bei 25 Würfen wenigstens 2 mal die Summe 10 zu werfen?

Aufgabe 120. Wie viel Würfe muss man mit 3 Würfeln machen, damit man die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat den Pasch 6, 6, 6 zu werfen?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 82.

B. Über das Theorem von Jacques Bernoulli.

Frage 20. Wie lautet das Bernoullische Theorem?

Erkl. 34. Es lebten mehrere bedeutende Mathematiker, welche den Namen Bernoulli führten. Der älteste von ihnen war Jacques Bernoulli (1654—1705) Professor der Mathematik in Basel. Sein Hauptwerk über die Wahrscheinlichkeitsrechnung: „Ars conjectandi" erschien (1713). Sein Nachfolger war sein Bruder Johann (1667—1748), dessen Söhne Nikolaus (1695—1726), Daniel (1700—1782), Johann (1710—1790) verschiedene Gebiete der Mathematik durch ihre Arbeiten bereicherten. Daniel Professor der Mathematik in Basel, hatte die Söhne Johann, geb. 1744, gest. 1807 als Direktor der Akademie in Berlin und Jakob geb. 1759, gest. 1789 als Professor der Mathematik in Königsberg. Der jüngste Karl Gustav, geb. 1834, starb als Naturforscher 1878 in San Francisco.

Antwort. Das Bernoullische Theorem lautet:

Ist p die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, δ eine beliebig gegebene, beliebig kleine Grösse, so kann man stets eine Zahl m so bestimmen, dass bei m Versuchen das Ereigniss m'-mal eintritt, so zwar, dass die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass $-\delta < p - \frac{m'}{m} < \delta$ ist, beliebig nahe der Einheit gebracht werden kann.

I. Hilfssatz: Ist

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \ldots + b^m \ldots (1)$$

und $$m = r\,(a+b) \ldots\ldots (2)$$

so kann man immer m so bestimmen, dass das Verhältnis des grössten Gliedes der rechten Seite zu dem Gliede, welches ihm um r Stellen vorausgeht oder folgt jede beliebig vorgegebene Grösse C übertrifft.

Ist also M das grösste dieser Glieder und bezeichnet man mit L_r das Glied, welches diesem M nach $r-1$ anderen Gliedern folgt und mit L_{-r} das Glied, welches M vorangeht um $r-1$ Glieder, so soll, wenn C beliebig gross genommen wird, m so bestimmt werden können, dass

$$\frac{M}{L_r} > C$$

und gleichzeitig

$$\frac{M}{L_r} > C \text{ ist.}$$

Wir haben schon in der Anmerkung 23 darauf aufmerksam gemacht, dass das grösste Glied der Entwicklung von $(p+q)^m$ unmessbar grösser ist als die, welche ihm in gewissem Abstande vorangehen oder folgen. Nun wollen wir beweisen, dass dieses Verhältnis jede Grenze überschreiten kann.

Vor allem ist das grösste Glied der Entwicklung von $(a+b)^m$ zu bestimmen. Dieses liefert uns die Antwort auf die Frage 15, wenn wir nur

$$p = \frac{a}{a+b} \text{ und } q = \frac{b}{a+b}$$

setzen, direkt als dasjenige Glied, für welches die Exponenten von p und q, also für uns die Exponenten von a und b gegeben sind durch die dortige Gleichung (3)

$$\alpha = mp = m \frac{a}{a+b} = ra$$

$$\beta = mq = m \frac{b}{a+b} = rb$$

Es ist also

$$M = \frac{(ra+rb)!}{(ra)!\,(rb)!} a^{ra}\, b^{rb} \quad \ldots\ldots (3)$$

und daher

$$\left.\begin{aligned} L_r &= \frac{(ra+rb!}{(ra-r)!\,(rb+r)!} a^{ra-r}\, b^{rb+r} \\ L_{-r} &= \frac{(ra+rb)!}{(ra+r)!\,(rb-r)!} a^{ra-r}\, b^{rb+r} \end{aligned}\right\} (4)$$

die Glieder, welche M nach $r-1$ Glieder folgen, oder welche M um $r-1$ Glieder vorausgehen.

Mithin ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{L_r} &= \frac{(ra-r)!\,(rb+r)!}{(ra)!\,(rb)!} \cdot \frac{a^r}{b^r} \\ \frac{M}{L_{-r}} &= \frac{(ra+r)!\,(rb-r)!}{(ra)!\,(rb)!} \cdot \frac{b^r}{a^r} \end{aligned}\right\} (5)$$

und wir bemerken, dass

$$\frac{M}{L_{-r}} \text{ übergeht in } \frac{M}{L_r}$$

wenn man a mit b vertauscht.

Wir betrachten vorerst

$$\frac{M}{L_r} = \frac{(ra-r)!\,(rb+r)!}{(ra)!\,(rb)!} \cdot \frac{a^r}{b^r},$$

indem wir es in der Form

$$\frac{M}{L_r} = \frac{(ra-r)!\,(rb+r)\,(rb+r-1)\;\ldots\;(rb+1)\,.\,(rb)!}{(ra-r)!\,(ra-r+1)\,(ra-r+2)\,\ldots\,ra\,.\,(rb)!} \cdot \frac{a^r}{b^r}$$

$$= \frac{(rb+r)\,(rb+r-1)\,\ldots\ldots\,(rb+1)}{(ra-r+1)\,(ra-r+2)\ldots\,ra} \cdot \frac{a^r}{b^r}$$

$$= \frac{rb+r}{ra-r+1} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{rb+r-1}{ra-r+2} \cdot \frac{a}{b} \cdots\cdots \frac{rb+1}{ra} \cdot \frac{a}{b}$$

schreiben, zu jedem der r Brüche einen Faktor $\frac{a}{b}$ setzend. Kürzer schreiben wir:

Erkl. 35. Es bedeutet

$$\prod_{i=0}^{k} F_i$$

das Produkt aller Faktoren F_0, F_1 .. bis F_k also

$$\prod_{i=0}^{k} F_i = F_0 \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,\ldots\ldots\, F_k$$

$$\frac{M}{L_r} = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{rb+r-i}{ra-r+i+1} \cdot \frac{a}{b} \;.\,. \quad (6)$$

Es ist aber

$$\frac{rb+r-i}{ra-r+i+1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1+\frac{1}{b}-\frac{i}{rb}}{1-\frac{1}{a}+\frac{i+1}{ra}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{rb}+\frac{1}{b}\left(1-\frac{i+1}{r}\right)}{1-\frac{1}{a}\left(1-\frac{i+1}{r}\right)}$$

Wir setzen m also auch a sehr gross voraus, so dass $\frac{1}{a}$ sehr klein ist und da $i+1 \leqq r$ für alle von in Betracht zu ziehenden i ist, so kann man

$$\frac{1}{1-\frac{1}{a}\left(1-\frac{i+1}{r}\right)} = 1+\frac{1}{a}\left(1-\frac{i+1}{r}\right)+\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{i+1}{r}\right)^2+\ldots\ldots$$

setzen oder, wenn man die Glieder mit $\frac{1}{a^2}$, ihrer Kleinheit wegen, vernachlässigt, wird

$$\frac{rb+r-i}{ra-r+i-1} \cdot \frac{a}{b} + \left[1+\frac{1}{rb}+\frac{1}{a}\left(1-\frac{i+1}{r}\right)\right]\left[1+\frac{1}{a}\left(1-\frac{i+1}{r}\right)\right]$$

$$\doteq 1+\frac{1}{rb}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{i+1}{r}\right)+\frac{1}{ab}\left(1-\frac{i+1}{r}\right)^2$$

woraus ersichtlich, dass für alle $i \leq r-1$ das Gliede

$$\frac{rb+r-i}{ra-r+i+1}\,\frac{a}{b} > 1 \quad \ldots\ldots (7)$$

ist, dass aber die Glieder mit wachsenden i abnehmen, indem der Faktor $\left(1-\frac{i+1}{r}\right)$ in der obigen Entwicklung abnimmt.

Nun ist für

$$i = o \ldots \frac{rb+r}{ra-r+1}\cdot\frac{a}{b} > \frac{b+1}{b}$$

für $i = r-1 \quad \ldots \frac{rb+1}{ra}\cdot\frac{a}{b} < \frac{b+1}{b}$

nachdem

$$\frac{(rb+r)a}{(ra-r+1)b} - \frac{b+1}{b} = \frac{(r-1)(b+1)}{b(ra-r+1)}$$

und

$$\frac{rb+1}{ra}\cdot\frac{a}{b} - \frac{b+1}{b} = -\frac{(r-1)}{rb}$$

ist. Es wird daher einen Wert $k \leq r-1$ von i geben, für welchen

$$\frac{rb+r-k}{ra-r+k+1}\cdot\frac{a}{b} > \frac{b+1}{b} > \frac{rb+r-k-1}{ra-r+k+2}\cdot\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots (8)$$

Erkl. 86. Durch die Bedingung (8) ist k vollständig bestimmt.

ist, und mithin wird, da die Glieder mit wachsendem i abnehmen, für alle $i \leq k$

$$\frac{rb+r-i}{ra-r+i+1}\cdot\frac{a}{b} \geqq \frac{b+1}{b}$$

sein, also auch

$$\prod_{i=0}^{k}\left(\frac{rb+r-i}{ra-r+i+1}\right)\frac{a}{b} \geqq \left(\frac{b+1}{b}\right)^k$$

und da nach der Relation (7) sicherlich

$$\prod_{i=k+1}^{r-1}\left(\frac{rb+r-i}{ra-r+i+1}\right)\frac{a}{b} > 1$$

ist, so wird auch stets

$$\prod_{i=0}^{r-1}\left(\frac{rb+r-i}{ra-r+i+1}\right)\frac{a}{b} > \left(\frac{b+1}{b}\right)^k$$

also nach Gleichung (6)

$$\frac{M}{L_r} > \left(\frac{b+1}{b}\right)^k$$

Soll nun

$$\frac{M}{L_r} > C$$

sein, wobei C willkürlich gegeben ist, so folgt, dass es genügt

$$\left(\frac{b+1}{b}\right)^k \geqq C \ldots\ldots (9)$$

zu machen, damit der gewünschten Forderung genügt wird.

Aus (9) folgt dann, dass

$$k \geqq \frac{\log C}{\log(b+1) - \log b} \ldots (10)$$

genommen werden muss.

Hat man auf diese Art k bestimmt, so liefert die Bedingung (8) für r die Beziehung

$$r \geqq k + 1 + \frac{k\,a}{b+1} \ldots\ldots\ldots 11)$$

und also

$$m \geqq \left[k + 1 + \frac{k\,a}{b+1}\right](a+b) \ldots (12)$$

damit

$$\frac{M}{L_r} > C \text{ ist.}$$

Soll auch

$$\frac{M}{L_{-r}} > C$$

sein, so ergibt sich aus der Bemerkung,

dass $\frac{M}{L_r}$ übergeht in $\frac{M}{L_{-r}}$

wenn man a mit b vertauscht, dass man vorerst eine Zahl k_1 bestimmen muss, für welche

$$k_1 \geqq \frac{\log C}{\log(a+1) - \log a} \ldots (10\text{a})$$

ist, sodann r_1 annehmen muss, so zwar, dass

$$r_1 \geqq k_1 + 1 + \frac{k_1 b}{a+1} \ldots\ldots\ldots (11\text{a})$$

ist, wodurch sich dann m_1 ergibt

$$m_1 \geqq \left[k_1 + 1 + \frac{k_1 b}{a+1}\right](a+b) \quad \text{. . (12a)}$$

Ist nun $m_1 < m$, so wird für m nicht bloss

$$\frac{M}{L_r} > C$$

sondern auch

$$\frac{M}{L_{-r}} > C$$

da schon m_1 der Bedingung (12 a) genügt.

Ist $m_1 > m$, so wird für m_1 nicht bloss

$$\frac{M}{L_{-r}} > C$$

sein, sondern auch

$$\frac{M}{L_r} > C$$

sich ergeben, da dann m_1 auch der Bedingung (12) genügt.

Wählt man daher unter den beiden Werten m, m_1 den grösseren aus, so genügt dieser sicherlich den Anforderungen, dass

$$\frac{M}{L_r} > C \quad \text{und} \quad \frac{M}{L_{-r}} > C$$

ist, womit der Hilfssatz bewiesen erscheint.

Um den Gang der Rechnung zu zeigen, wählen wir $a = 2$, $b = 3$ und $C = 10^4$.

Dann liefert

Gleichung (10)

$$k \geqq \frac{4}{\log 4 - \log 3} = \frac{4}{0{,}1249387}$$

$$k \geqq 32$$

Gleichung (11)

$$r \geqq 33 + \frac{2 \,.\, 32}{4}$$

$$r \geqq 49$$

und schliesslich Gleichung (12)

$$m \geqq 49 \,.\, 5$$

$$m \geqq 245$$

Anderseits liefert Gleichung (10a)

$$k_1 \geqq \frac{4}{\log 3 - \log 2} = \frac{4}{0{,}1760913}$$

$$k_1 \geqq 23$$

Gleichung (11a)

$$r_1 \geqq 24 + \frac{3 \cdot 23}{3}$$

$$r_1 \geqq 47$$

und Gleichung (12a)

$$m_1 \geqq 47 \cdot 5$$

$$m_1 > 235$$

Es genügt also $m = 245$ zu nehmen, damit

$$\text{sowohl } \frac{M}{L_{49}} \text{ als } \frac{M}{L_{-49}}$$

grösser als 10000 ist.

Es ist auch thatsächlich für $m = 245$

$$M = \frac{245!}{(2 \cdot 49)!\,(3 \cdot 49)!}\, 2^{2 \cdot 49}\, 3^{3 \cdot 49}$$

und

$$L_{49} = \frac{245!}{49!\,(4 \cdot 49)!}\, 2^{49}\, 3^{4 \cdot 49}$$

nach Gleichungen (4); also ist

$$\frac{M}{L_{49}} = \frac{49!\,(4 \cdot 49)!}{(2 \cdot 49)!\,(3 \cdot 49)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{49}$$

Wendet man für die Faktoriellen die Stirlingsche Formel f an, so ergibt sich:

$$\frac{M}{L_{49}} = \frac{49^{49} \cdot 4^{4 \cdot 49} \cdot 49^{4 \cdot 49} \sqrt{2\pi \cdot 49} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 4 \cdot 49}}{2^{2 \cdot 49} \cdot 49^{2 \cdot 49} \cdot 3^{3 \cdot 49} \cdot 49^{3 \cdot 49} \sqrt{2\pi \cdot 2 \cdot 49}\, \sqrt{2\pi \cdot 3 \cdot 49}} \left(\frac{2}{3}\right)^{49}$$

$$= \frac{2^{8 \cdot 49} \cdot 2 \cdot 49}{2^{2 \cdot 49}\, 3^{3 \cdot 49} \cdot 49 \cdot \sqrt{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^{49}$$

$$= \frac{2^{7 \cdot 49}}{3^{4 \cdot 49}} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{49} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\log \frac{M}{L_{49}} = 9{,}6 \quad \text{nach nebenstehender Rechnung,}$$

also ist

$$\frac{M}{L_{49}} > 10^9$$

also sicherlich grösser als 10000.

Ähnlich geht die Rechnung für

$$\frac{M}{L_{-r}}$$

auch dieses übertrifft 10000 bedeutend.

Nebenrechnung:

$$\left.\begin{array}{l} \log 2^7 = 2{,}1072100 \\ \log 3^4 = 1{,}9084842 \end{array}\right\} -$$

$$0{,}1997258$$

$$\underline{0{,}1987258 \times 49}$$

$$\left.\begin{array}{r} 9{,}7765642 \\ \log \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}9109543 - 1 \end{array}\right\} +$$

$$9{,}6875185$$

2. Hilfssatz: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der Entwicklung (1) von $(a+b)^m$ ist desto grösser, je weiter die Glieder vom Maximalgliede M entfernt sind. Dabei ist vorausgesetzt, dass das Glied, welches dem Maximalgliede näher ist, den Zähler des Quotienten bildet.

Nach Gleichung (3) ist das Maximalglied:

$$M = \frac{(ra+rb)!}{(ra)!\,(rb)!}\, a^{ra}\, b^{rb}$$

also sind die ihm um ν und $\nu+1$ Stellen vorangehenden Glieder:

$$L_{-\nu} = \frac{(ra+rb)!}{(ra+\nu)!\,(rb-\nu)}\, a^{ra+\nu}\, b^{rb-\nu}$$

$$L_{-(\nu+1)} = \frac{(ra+rb)!}{(ra+\nu+1)!\,(rb-\nu-1)!}\, a^{ra+\nu+1}\, b^{rb-\nu-1}$$

daher

$$\frac{L_\nu}{L_{-(\nu+1)}} = \frac{ra+\nu+1}{rb-\nu}\cdot\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

woraus ersichtlich, dass der Quotient mit wachsendem ν wächst.

Ebenso ist:

$$L_\nu = \frac{(ra+rb)!}{(ra-\nu)!\,(rb+\nu)!}\, a^{ra-\nu}\, b^{rb+\nu}$$

$$L_{\nu+1} = \frac{(ra+rb)!}{(ra-\nu-1)!\,(rb+\nu+1)!}\, a^{ra-\nu-1}\, b^{rb+\nu+1}$$

also

$$\frac{L_\nu}{L_{\nu+1}} = \frac{rb+\nu+1}{ra-\nu}\cdot\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13a)$$

d. h. auch dieser Quotient wächst mit wachsendem ν.

Beweis des Bernoullischen Theorems.

Wir setzen

$$p = \frac{a}{a+b} \qquad q = \frac{b}{a+b} \quad \ldots \quad (14)$$

und indem wir m unbestimmt lassen, schliessen wir m' in die Grenzen ein:

$$m\,\frac{a+1}{a+b} \geqq m' \geqq \frac{a-1}{a+b}\,m \quad \ldots\ldots (15)$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (2)

$$r\,(a+1) \geqq m' \geqq (a-1)\,r$$

d. h. die Zahl m', welche angibt, wie oftmal das Ereignis eintrifft unter den m Versuchen, soll zwischen $r\,(a+1)$ und $r\,(a-1)$ liegen.

Nun ist die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass das Ereignis unter m Versuchen höchstens $r\,(a+1)$-mal und wenigstens $r\,(a-1)$-mal eintritt nach Aufg. 78, wenn wir $ra = \alpha$ und $rb = \beta$ setzen:

$$W = \sum_{i=-r}^{i=+r} \binom{m}{\beta+i} p^{\alpha-i} q^{\beta+i} \quad \ldots (16)$$

oder, wenn wir beachten, dass

$$\binom{m}{\beta+i} p^{\alpha-i} q^{\beta+i} = \binom{m}{rb+i} \frac{a^{ra-i}\, b^{rb+i}}{(a+b)^m}$$

ist, und

$$\binom{m}{rb-i} a^{ra+i}\, b^{rb-i} = L_i^{(1)}$$

$$\binom{m}{rb+i} a^{ra-i}\, b^{rb+i} = N_i^{(1)} \text{ setzen,}$$

so können wir auch setzen

$$W = \frac{L_r + L_{r-1}^{(1)} + L_{r-2}^{(1)} + \ldots + L_2^{(1)} + L_1^{(1)} + M + N_1^{(1)} + N_2^{(1)} + N_{r-1}^{(1)} + N_r^{(1)}}{(a+b)^m} \quad (17)$$

Es bleibt noch zu beweisen, dass dieser Wert von W der Einheit beliebig nahegebracht werden kann durch das Wachsen von m allein.

Wir denken uns die $m+1$ Glieder der Entwicklung (1) von $(a+b)^m$, da $m = r\,(a+b)$ ist in $(a+b)$ Gruppen von r geteilt, so dass M isoliert steht, demselben aber b Gruppen vorangehen und a folgen. Also in folgender Art:

$$(a+b)^{ra+rb} = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}\, b + \ldots\ldots + \binom{m}{r-1} a^{m-r+1}\, b^{r-1}$$

$$+ \binom{m}{r} a^{m-r}\, b^r + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{m}{2r-1} a^{m-2r+1}\, b^{2r-1}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kan[illegible] jede Buchhandlung bezogen werden.

[illegible]nrlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

813. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erster Teil. Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. Forts. v. Heft 812. — Seite 113—128. Mit 3 Figuren.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 812. — Seite 113—128. Mit 3 Figuren.

Inhalt:

[Bew]eis des Bernoullischen Theorems. — Gelöste Aufgaben über das Bernoullische Theorem.

Stuttgart 1890.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergess[...]n mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Be[...]s-zweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen [...]d somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen ge[...]n.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische [...]f-gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der N[...]n verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verf[...]r, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird de[...]g thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshan[...]**

$$+\binom{m}{rb-r} a^{ra+r} b^{rb-r} + \ldots\ldots + \binom{m}{rb-1} a^{ra+1} b^{rb-1}$$
$$+\binom{m}{rb} a^{ra} b^{rb} \quad \ldots\ldots (18)$$
$$+\binom{m}{rb+1} a^{ra-1} b^{rb+1} + \ldots\ldots + \binom{m}{rb+r} a^{ra-r} b^{rb+r}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\binom{m}{r-1} a^{r-1} b^{m-r+1} + \ldots\ldots + b^m$$

oder wenn wir die Gruppen mit Indices bezeichnen, welche ihre Stelle gegenüber dem Maximalglied angeben, erhält man in übersichtlicher Form:

$$\begin{aligned}
(a+b)^m = {} & L_r^{(b)} + L_{r-1}^{(b)} + \ldots\ldots + L_1^{(b)} \\
& + L_r^{(b-1)} + L_{r-1}^{(b-1)} + \ldots\ldots + L_1^{(b-1)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots \\
& + L_r^{(2)} + L_{r-1}^{(2)} + \ldots\ldots + L_1^{(2)} \\
& + L_r^{(1)} + L_{r-1}^{(1)} + \ldots\ldots + L_1^{(1)} \\
& + M \qquad\qquad \ldots\ldots (19) \\
& + N_1^{(1)} + N_2^{(1)} + \ldots\ldots + N_r^{(1)} \\
& + N_1^{(2)} + N_2^{(2)} + \ldots\ldots + N_r^{(2)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + N_1^{(a-1)} + N_2^{(a-1)} + \ldots\ldots + N_r^{(a-1)} \\
& + N_1^{(a)} + N_2^{(a)} + \ldots\ldots + N_r^{(a)}
\end{aligned}$$

Nach dem 2ten Hilfssatze ist nun

$$\begin{aligned}
\frac{M}{L_1^{(1)}} &< \frac{L_r^{(1)}}{L_1^{(2)}} \\
\frac{L_1^{(1)}}{L_2^{(1)}} &< \frac{L_1^{(2)}}{L_2^{(2)}} \qquad \ldots\ldots (20) \\
&\vdots \\
\frac{L_{r-1}^{(1)}}{L_r^{(1)}} &< \frac{L_{r-1}^{(2)}}{L_r^{(2)}}
\end{aligned}$$

da diese Quotienten immer abnehmen.

Es ist also auch

$$\frac{M}{L_r^{(1)}} < \frac{L_1^{(1)}}{L_1^{(2)}} < \frac{L_2^{(1)}}{L_2^{(2)}} \ldots\ldots < \frac{L_{r-1}^{(1)}}{L_{r-1}^{(2)}} < \frac{L^{(1)}}{L_r^{(2)}} \quad \ldots\ldots (21)$$

und da

$$\frac{M}{L_r^{(1)}} = \frac{M}{L_r^{(1)}} \cdot \frac{L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots + L_r^{(2)}}{L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots + L_r^{(2)}}$$

$$= \frac{\frac{M}{L_r^{(1)}} L_1^{(2)} + \frac{M}{L_r^{(1)}} L_2^{(2)} + \ldots\ldots + \frac{M}{L_r^{(1)}} L_r^{(2)}}{L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots\ldots + L_r^{(2)}}$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf die Beziehungen (21)

$$\frac{M}{L_r^{(1)}} < \frac{L_1^{(1)} + L_2^{(1)} + \ldots\ldots + L_r^{(1)}}{L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots\ldots + L_r^{(2)}} \quad \ldots\ldots (22)$$

Nun kann man nach dem 1ten Hilfssatze Gleichung (10 a)

$$\frac{M}{L_r^{(1)}} > C$$

bei wachsendem m machen, wo C ganz willkürlich ist, also wird auch

$$L_1^{(1)} + L_2^{(1)} + \ldots\ldots + L_r^{(1)} > C(L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots\ldots + L_r^{(2)}) \quad \ldots\ldots (23)$$

Die Beziehungen (20), also auch (21) und (22) gelten für je zwei aufeinanderfolgende Gruppen von r Gliedern und da der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder nach Hilfssatz 2 immer grösser wird, so ist die Summe der Gruppe

$$L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots\ldots + L_r^{(2)}$$

grösser als die Summe irgend einer der $(b-2)$ vorangehenden, d. h. es ist

$$L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots\ldots + L_r^{(2)} > L_1^{(i)} + L_2^{(i)} + \ldots\ldots + L_r^{(i)}$$

$$i = 3, 4, \ldots . b$$

oder wenn man rechts und links über alle i summiert:

$$(b-2)(L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots\ldots + L_r^{(2)} > \sum_{i=2}^{i=b} (L_1^{(i)} + L_2^{(i)} + \ldots\ldots + L_r^{(i)})$$

fügt man noch beiderseits $L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots L_r^{(2)}$ hinzu, so wird

$$(b-1)(L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots\ldots + L_r^{(2)} > \sum_{i=2}^{i=b} (L_1^{(i)} + L_2^{(i)} + \ldots\ldots + L_r^{(i)}) \quad \ldots\ldots (25)$$

Nimmt man nun in (23) den beliebigen Wert $C = u\,(b-1)$ an, wobei u eine beliebig grosse Zahl ist, so folgt aus (23)

$$L_1^{(1)} + L_2^{(1)} + \ldots\ldots + L_r^{(1)} > u\,(b-1)\,(L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + \ldots\ldots + L_r^{(2)})$$

und aus (25), dass

$$L_1^{(1)} + L_2^{(1)} + \ldots\ldots + L_r^{(1)} > u \sum_{i=2}^{i=b} (L_1^{(i)} + L_2^{(i)} + \ldots\ldots + L_r^{(i)}) \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

gemacht werden kann, wenn m wächst.

Da die dem Maximalglied folgenden Glieder in (19) ähnlichen Bedingungen (20), also auch (21), (22) genügen, so kann man eine Zahl m_1 finden, so dass

$$N_1^{(1)} + N_2^{(1)} + \ldots\ldots + N_r^{(1)} > C_1\,(N_1^{(2)} + N_2^{(2)} + \ldots\ldots + N_r^{(2)})$$

wird und da auch

$$N_1^{(2)} + N_2^{(2)} + \ldots\ldots + N_r^{(2)} > N_1^{(i)} + N_2^{(i)} + \ldots\ldots + N_r^{(i)}$$

$$i = 3, 4, \ldots\ldots a$$

ist, so wird wiederum

$$(a-1)\,(N_1^{(2)} + N_2^{(2)} + \ldots\ldots + N_r^{(2)}) > \sum_2^a{}_i\, (N_1^{(i)} + N_2^{(i)} + \ldots\ldots + N_r^{(i)})$$

und wenn man jetzt $C = u\,(a-1)$ macht, so folgt, dass für ein m_1 sich

$$N_1^{(1)} + N_2^{(1)} + \ldots\ldots + N_r^{(1)} > u \sum_2^a{}_i\, (N_1^{(i)} + N_2^{(i)} + \ldots\ldots + N_r^{(i)}) \quad \ldots\ldots (27)$$

ergibt.

Da jede der Bedingungen (26) und (27) mit wachsendem m desto grössere Ungleichheiten liefert, so genügt beiden Bedingungen die grössere der beiden Zahlen m, m_1. Diese wollen wir einfach m nennen. Es wird also für ein m und alle grösseren m sicherlich:

$$L_1^{(1)} + L_2^{(1)} + \ldots\ldots + L_r^{(1)} > u \sum_{i=2}^{i=b} (L_1^{(i)} + L_2^{(i)} + \ldots\ldots + L_r^{(i)})$$

$$N_1^{(1)} + N_2^{(1)} + \ldots\ldots + N_r^{(1)} > u \sum_{i=2}^{i=a} (N_1^{(i)} + N_2^{(i)} + \ldots\ldots + N_r^{(i)})$$

sein, und wenn man beide Ungleichheiten addiert:

$$L_r^{(1)} + \ldots + L_1^{(1)} + N_1^{(1)} + \ldots + N_r^{(1)} > u \left\{ \sum_{i=2}^{i=b} (L_1^{(i)} + \ldots + L_r^{(i)}) + \sum_{i=2}^{i=a} (N_1^{(i)} + \ldots + N_r^{(i)}) \right\}$$

Fügt man beiderseits M zu und berücksichtigt die Gleichungen (17) und (19), so folgt:

$$(a+b)^m W > u \left\{ (a+b)^m - (L_r^{(1)} + L_{r-1}^{(1)} + \ldots + L_1^{(1)} + M + N_1^{(1)} + \ldots + N_r^{(1)}) \right\} + M$$

oder

$$(a+b)^m W > u \left\{ (a+b)^m - (a+b)^m W \right\} + M$$

woraus

$$(a+b)^m (1+u) W > (a+b)^m u + M$$

folgt, also

$$W > \frac{(a+b)^m u + M}{(1+u)(a+b)^m}$$

$$W > 1 - \frac{1 - \dfrac{M}{(a+b)^m}}{1+u}$$

Hat man nun u fest gewählt und lässt m wachsen, so wird, da M immer kleiner wird, $\frac{M}{(a+b)^m}$ über alle Grenzen abnehmen, so dass man diesen Teil vernachlässigen kann und

$$W > 1 - \frac{1}{1+u} \quad \ldots \quad (26)$$

erhält. Wählt man daher u sehr gross, so wird W beliebig nahe der Einheit gebracht, denn es kann $\frac{1}{1+u}$ beliebig klein gemacht werden durch die Wahl von u.

Wir haben daher den Satz: Die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass unter m Versuchen das Ereignis m'-mal eintritt, wobei

$$m \frac{a+1}{a+b} \geqq m' \geqq \frac{a-1}{a+b} m$$

ist, kann beliebig nahe der Einheit gebracht werden.

Setzen wir nun

$$p = \frac{s\,a}{s(a+b)} \qquad q = \frac{s\,b}{s(a+b)} \quad \ldots (27)$$

wo s eine beliebig grosse Zahl ist, und bezeichnen wir mit a', b' die Zahlen $s a$ und $s b$; so kann auch die Wahrscheinlichkeit W' dafür, dass unter m Versuchen das Ereignis m'-mal eintritt, wobei

$$m \frac{a'+1}{a'+b'} > m' > \frac{a'-1}{a'+b'} m$$

ist, beliebig nahe der Einheit gebracht werden.

Da nun diese Bedingung sich in der Form:

$$\frac{a'}{a'+b'} + \frac{1}{a'+b'} > \frac{m'}{m} > \frac{a'}{a'+b'} - \frac{1}{a'+b'}$$

schreibt, und

$$p = \frac{a'}{a'+b'} = \frac{s a}{s(a+b)} = \frac{a}{a+b}$$

ist, so folgt auch dass

$$\frac{1}{s(a+b)} > p - \frac{m'}{m} > -\frac{1}{s(a+b)} \quad \text{..(28)}$$

und da man durch die Wahl von s stets

$$\frac{1}{s(a+b)} < \delta$$

machen kann, wie klein δ auch sein mag, so folgt der Satz:

M a n k a n n d i e W a h r s c h e i n l i c h k e i t W d a f ü r, d a s s

$$\delta > p - \frac{m'}{m} > -\delta$$

i s t, w e n n d a s E r e i g n i s i n m V e r s u c h e n m' m a l e i n t r e t e n s o l l, b e l i e b i g n a h e d e r E i n h e i t b r i n g e n, w e n n m a n m w a c h s e n l ä s s t.

Hiemit ist der Bernoullische Satz bewiesen.

Für die Rechnung haben wir also folgende Formeln zu benützen:

Formel 12:

$$W \geqq \frac{u}{1+u}$$

$$p = \frac{a\,s}{s\,(a+b)} \qquad q = \frac{b\,s}{s\,(a+b)}$$

$$\delta \geqq p - \frac{m'}{m} \geqq -\delta$$

$$\frac{1}{s\,(a+b)} \leqq \delta$$

$$C = u\,(s\,b - 1) \qquad C_1 = u\,(s\,a - 1)$$

$$k \geqq \frac{\log C}{\log (s\,a + 1) - \log s\,a} \qquad k_1 \geqq \frac{\log C_1}{\log (s\,b + 1) - \log s\,b}$$

$$r \geqq k + 1 + \frac{k\,s\,b}{s\,a + 1} \qquad r_1 \geqq k_1 + 1 + \frac{k_1\,s\,a}{s\,b + 1}$$

$$m \geqq r\,s\,(a+b) \qquad m_1 \geqq r_1\,s\,(a+b)$$

wobei dann das grössere m zu nehmen ist.

Frage 21. Welche Form nimmt der analytische Ausdruck des Bernoullischen Theorems an, wenn an Stelle die Werte

$$y_n = \binom{m}{\beta + n} p^{\alpha - n}\; q^{\beta - n}$$

gesetzt werden die Werte

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\; e^{-h^2 x^2}$$

welche im Abschnitt A Gleichung 16 für y_n erhalten wurden, sobald m sehr gross ist?

Antwort. Ist W die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, bei m Versuchen, so oft mal eintritt, etwa m'-mal, dass

$$+\delta > p - \frac{m'}{m} > -\delta$$

wird, so ist

Formel 13:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2\,p\,q\,m}}$$

$$r \leqq m\delta$$

$$p + q = 1$$

hiebei ist r möglichst gross zu nehmen.

Es ist W eigentlich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis nicht öfters als $(\alpha + r)$-mal und nicht weniger oft als $(\alpha - r)$-mal eintritt, wobei

$$\alpha = m\,p + \varepsilon, \quad o \leqq \varepsilon \leqq 1$$

ist. Es ist nämlich dann

$$\alpha + r \geqq m' \geqq \alpha - r$$

oder

$$mp + r + \varepsilon > m' > mp - r + \varepsilon$$

$$p + \frac{r}{m} + \frac{\varepsilon}{m} > \frac{m'}{m} > p - \frac{r}{m} + \frac{\varepsilon}{m}$$

Da nun ε ein echter Bruch und m sehr gross ist, so kann $\frac{\varepsilon}{m}$ vernachlässigt werden und es ist also

$$\frac{r}{m} > p - \frac{m'}{m} > -\frac{r}{m}$$

und da

$$\frac{r}{m} \leq \delta$$

ist, so ist auch

$$\delta > p - \frac{m'}{m} > -\delta$$

wie gefordert wurde.

B e w e i s der Formel 13: Nach Aufgabe 78 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis wenigstens $(\alpha - r)$-mal und höchstens $(\alpha - r)$-mal bei m Versuchen eintritt:

$$W = \frac{\sum_{-r}^{+r}{}_i \binom{m}{\beta + i} a^{\alpha - i} b^{\beta + i}}{(a + b)^m}$$

oder da

$$(a + b)^m = \sum_{-\beta}^{+\alpha} \binom{m}{\beta + i} a^{\alpha - i} b^{\beta + i}$$

ist, erhält man, wenn man im Zähler und Nenner

$$p = \frac{a}{a + b} \quad q = \frac{b}{a + b}$$

einführt:

$$W = \frac{\sum_{-r}^{+r} \binom{m}{\beta + i} p^{\alpha - i} q^{\beta + i}}{\sum_{-\beta}^{+\alpha} \binom{m}{\beta + i} p^{\alpha - i} q^{\beta + i}}$$

wobei der Nenner natürlich $= 1$ ist.

Führen wir nun an Stelle der einzelnen

Summanden die Werte ein, wie sie Gleichung (16) liefert, also

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

so wird

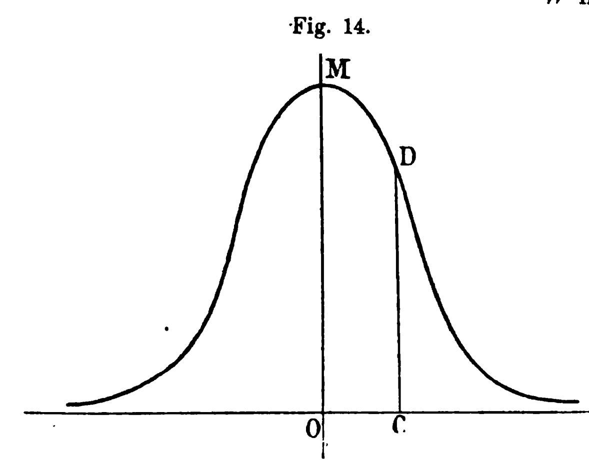
$$W = \frac{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{-a}^{+a} e^{-h^2x^2}}{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{-g}^{+k} e^{-h^2x^2}}$$

wobei, da $i = \frac{x}{\triangle x}$ zu setzen ist, die Summen sich aber von $i = -r$ bis $i = +r$ resp. von $-\beta$ bis $+\alpha$ erstrecken

$g = \beta \triangle x$, $a = r \triangle x$, $k = \alpha \triangle x$ ist.

Multiplizieren wir Zähler und Nenner von W mit $\triangle x$ und übergehen zur Grenze, indem wir m ins Unendliche wachsen lassen, $\triangle x$ zum dx machen, wie es in der Antwort auf Frage 16 des Abschnittes A) auseinandergesetzt wurde, so übergehen die Summen in bestimmte Integrale. Und zwar wird, da $\beta \triangle x + \alpha \triangle x$ die ganze Strecke angibt, über welcher sich (Figur 14) die Curve über der Abscissenachse erhebt, diese Strecke aber die ganze Abscissenachse wird, so dass sowohl oA als oB unendlich werden, so ist $\beta \triangle x = g = \infty$ und $\alpha \triangle x = k = \infty$, hingegen bleibt $r \triangle x = a$ endlich als Abscisse des Punktes D.

Fig. 14.



Es wird also

$$W = \frac{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2x^2} dx}{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx}$$

und da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist (vergleiche den Anhang II), so ist der Nenner gleich 1 und es wird

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2x^2} dx$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{o}^{a} e^{-h^2x^2} dx + \int_{o}^{a} e^{-h^2x^2} dx \right)$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{o}^{a} e^{-h^2x^2} dx$$

indem man bei dem ersten Integral die Grenzen umkehrt und an Stelle von x einführt $-x$, wodurch es dem zweiten gleich wird.

Setzt man noch

$$hx = t$$

also

$$h\,dx = dt$$

so wird

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{o}^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

wobei da für $x = a$, $t = \gamma$ werden soll, $\gamma = h\,a$ ist. Wird nun für h der Wert aus Gleichung (13) Seite 71 eingesetzt, so folgt

$$\gamma = \frac{a}{\Delta x \sqrt{2pqm}}$$

oder da $a = r \Delta x$ war

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2pqm}}$$

wodurch der Beweis erbracht ist.

Anmerkung 24. Wir können das Bernoullische Theorem auch so aussprechen: Ist p die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und tritt dasselbe bei einer Anzahl m von Versuchen m' mal auf, so kann man die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass $p - p' < \delta$ und

$$p' = \frac{m'}{m} \pm \frac{\gamma \sqrt{2pq}}{\sqrt{m}}$$

ist, beliebig nahe der Einheit bringen, dadurch, dass m sehr gross wird und zwar ist

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{o}^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

Frage 22. Wie berechnet man den Wert des Ausdruckes

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt = \Theta(\gamma)$$

für beliebige Werte γ?

Antwort. Entwickelt man e^{-t^2} in eine Potenzenreihe:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{1.2} - \frac{t^6}{1.2.3} + \ldots .$$

so ergibt sich

$$\int_0^t e^{-t^2} dt = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} \frac{t^5}{1.2} + \frac{1}{7} \frac{t^7}{1.2.3} + \ldots .$$

also

$$\Theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2\gamma}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{3} \gamma^2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{\gamma^4}{1.2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{\gamma^6}{1.2.3} + \cdot \right]$$

Diese Reihe couvengiert sehr gut, und es genügt nur einige Glieder derselben zu nehmen, um einen hinreichenden guten Wert von $\Theta(\gamma)$ zu erhalten.

Es ist

$$\Theta(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 1$$

wie aus Anhang II ersichtlich. Bei Berechnung von $\Theta(\gamma)$ aber zeigt es sich, dass für $\gamma = 4$ schon

$$\Theta(4) = 0{,}9999999$$

wird, also um weniger als

$$0{,}0000001$$

von der Einheit verschieden ist.

Die Tabelle II gibt die Werte von $\Theta(\gamma)$ für die Argumente von 0 bis 3 von $\frac{1}{100}$ zu $\frac{1}{100}$ fortschreitend.

Wird also verlangt, dass W um 0,0000001 von der Einheit abweicht, so genügt offenbar, $\gamma = 4$ vorauszusetzen, wodurch sich, wenn δ gegeben ist, aus der Bedingung

$$\frac{7\sqrt{2pq}}{\sqrt{m}} < \delta$$

$$m > \frac{16 . 2\, pq}{\delta^2}$$

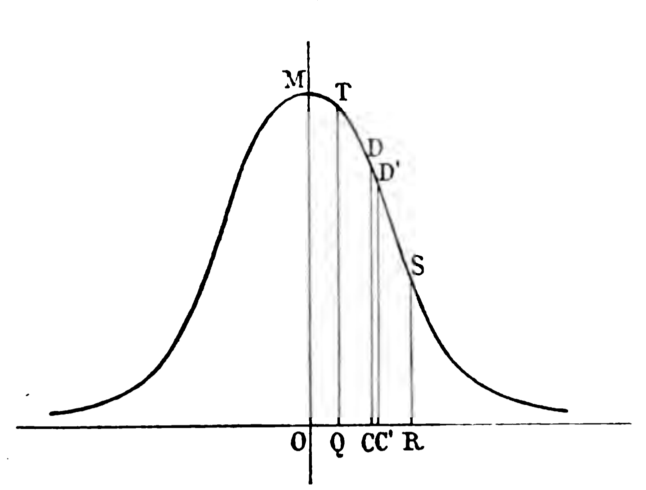
ergibt. Als Beispiele siehe die folgenden Aufgaben.

Anmerkung 25. Wir haben gesehen, dass die Curve, deren Gleichung

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}$$

ist, symmetrisch zur y-Achse verlauft und die x-Achse zur Asymptote besitzt.

Figur 15.



Sei $OC = x$, also $CD = y$, so stellt, wie Gleichung (15) Seite 73 angab, $w = y\,dx$ die relative Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit p war bei m Versuchen um eine bestimmte Anzahlmal öfters auftritt als mp mal. Diese Anzahl war durch $n = \frac{a}{dx}$ ausgedrückt, also war $OC = x = n\,dx$ ein Mass für dieselbe. Nun stellt $y\,dx$ den unendlich kleinen Flächenstreifen $CC'D'D$ dar, wenn $CC' = dx$ ist. Nach dem Satze über die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die verschiedene Ursachen haben können, Formel (3'), wird also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis um n' mal öfters eintritt als mp mal, wobei n' die Werte zwischen $\frac{x_0}{\triangle x}$ und $\frac{x_1}{\triangle x}$ haben kann, den Wert $y_0 dx + y' dx + y'' dx + \ldots + y_1 dx$ haben, wenn $y_0, y', y'' \ldots y_1$ die Ordinaten der Punkte der Curve sind, die den Abscissen x_0, $x_0 + dx$, $x_0 + 2dx$, $x_0 + 3dx \ldots x_1$ entsprechen. Mit anderen Worten es ist diese relative Wahrscheinlichkeit

$$w = \int_{x_0}^{x} y\, dx$$

d. h. sie ist durch die Fläche $QRST$ dargestellt, die von der x-Achse den Ordinaten QT und RS und der Curve begrenzt wird, wobei $OQ = x_0$, $OR = x_1$ ist.

Da die Summe aller relativer Wahrscheinlichkeiten für alle Werte von x von $-\infty$ bis $+\infty$ den Wert 1 hat, indem

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,dx;$$

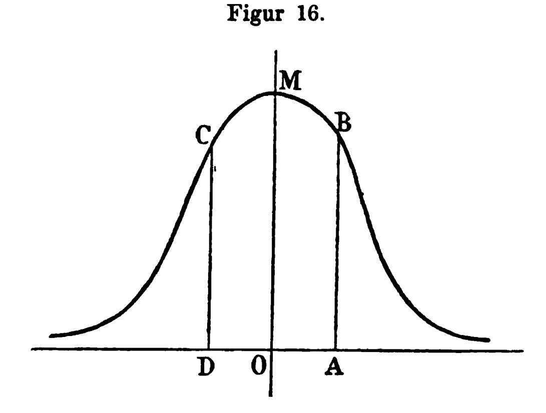
so ist die Fläche, welche die Curve mit der x-Achse begrenzt = 1.

Ist $x_0 = -x_1$, so ist

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_1}^{+x_1} e^{-h^2x^2}\,dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis n'mal eintritt, wobei n' von m um $\pm\frac{x_1}{dx}$ abweicht.

Figur 16.



Ist Figur 16 $OA = DO = x_1$, so ist W = Fläche $(ABCD)$ = 2 Fläche $(OABM)$, da die Curve symmetrisch ist, also ist

$$W = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+x_1} e^{-h^2x^2}\,dx,$$

was wir auch oben fanden.

Gelöste Aufgaben über das Bernoullische Theorem.

Aufgabe 121. Eine Urne enthält 3 weisse und 2 schwarze Kugeln. Man bestimme die Anzahl m von Zügen, in denen m' weisse Kugeln erscheinen, so dass

$$\frac{1}{50} > \frac{3}{5} - \frac{m'}{m} > -\frac{1}{50}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit W wird, wobei

$$W \geq \frac{1000}{1001}$$

sein soll.

Auflösung. Für das Ziehen einer weissen Kugel ist die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{3}{5} = \frac{a}{a+b}$$

für das Ziehen einer schwarzen folgt

$$q = \frac{2}{5} = \frac{b}{a+b}$$

Oder: Man bestimme die Anzahl m von Zügen, für welche m' weisse Kugeln erscheinen, so dass die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass

$$\frac{3}{5}m + \frac{m}{50} > m' > \frac{3}{5}m - \frac{m}{50}$$

ist, den Wert

$$W \geqq \frac{1000}{1001}$$

hat.

Mit Rücksicht auf die Formeln (12) ergibt sich nun, da zufolge der Aufgabe

$$W \geqq \frac{1000}{1001}$$

sein soll

$$u = 1000$$

ferner da

$$\frac{1}{50} > p - \frac{m'}{m} > -\frac{1}{50}$$

stattfinden soll

$$\delta = \frac{1}{50}$$

und mithin genügt

$$s = 10$$

zu nehmen, da $a + b = 5$ ist.

Es ist also

$$C = 1000 . 19 \qquad C_1 = 1000 . 29$$

Wir berechnen vorerst m. Hiezu ist:

$$k \geqq \frac{\log C}{\log (sa + 1) - \log sa}$$

zu machen. Nach nebenstehender Rechnung folgt

Nebenrechnung:

$$\log 19000 = 4{,}2787536$$

$$\begin{array}{rl} \log 31 = & 1{,}4913617 \\ \log 30 = & 1{,}4771213 \\ \hline & 0{,}0142404 \end{array} \; -$$

$$\begin{array}{rl} \log 42787536 = & 7{,}6313173 \\ \log 142404 = & 5{,}1535112 \\ \hline & 2{,}4778061 \end{array} \; -$$

300,5

$$\frac{\log C}{\log (sa + 1) - \log sa} = \frac{42787536}{142404} = 300{,}5.$$

Wir nehmen also

$$k = 301$$

und da dann

$$k + 1 + \frac{ksb}{sa + 1} = 302 + \frac{301 . 20}{31}$$
$$= 496 . 2$$

wird, so genügt

$$r = 497$$

zu nehmen, wodurch

$$m \geqq 497 . 50$$
$$m \geqq 24850$$

folgt.

Für die Berechnung von m_1 haben wir der Reihe nach

Nebenrechnung:

$$\log 29000 = 4{,}4623980$$

$$\begin{array}{rl} \log 21 = & 1{,}3222193 \\ \log 20 = & 1{,}3010300 \\ \hline & 0{,}0211893 \end{array} \; -$$

$$\begin{array}{rl} \log 44623980 = & 7{,}6495684 \\ \log 211893 = & 5{,}3261105 \\ \hline & 2.3234579 \end{array} \; -$$

210,6

$$\frac{\log C_1}{\log (sb + 1) - \log sb} = \frac{44623980}{211893} = 210{,}6$$

$$k_1 = 211$$

$$k_1 + 1 + \frac{k_1 \, sa}{sb + 1} = 212 + \frac{211 . 30}{21} = 513{,}4$$

$$r_1 = 514$$

$$m_1 \geqq 514{,}50$$

$$m_1 \geqq 25700$$

Man muss also

$$m \geqq 25700$$

annehmen. Die Lösung der Aufgabe lautet daher:

Bei 25 700 Zügen ist $\frac{1000}{1001}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass m' weisse Kugeln gezogen werden, wobei

$$\frac{1}{50} > \frac{3}{5} - \frac{m'}{25700} > -\frac{1}{50}$$

ist.

Da sich aus dieser Ungleichung

$$514 > 15420 - m' > -514$$

oder

$$15934 > m' > 14906$$

ergibt, so kann man die Aufgabe auch so beantworten:

Bei 25 700 Zügen ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht mehr als 15 934 und nicht weniger als 14 906 weisse Kugeln gezogen werden $> \frac{1000}{1001}$.

Anmerkung 26. Die vorstehende Rechnung ist, wie man sieht, etwas umständlich, da man alle Daten zu berechnen hat, und liefert auch zu grosse Werte, indem man immer die obere Grenze wählen muss. Einfacher geht die Rechnung mit Benutzung der Tabelle II. da in dieser ein Teil der Rechnungen schon vorausgemacht ist. Wir wollen daher das vorstehende Beispiel auch mit Hilfe der Tabelle II berechnen und im Folgenden nur nach dieser Methode die Aufgaben lösen, da die Aufgabe 121 zeigt, wie man zu verfahren hat, wenn die Tabelle II nicht benutzt wird.

Aufgabe 122. Eine Urne enthält 3 weisse und 2 schwarze Kugeln. Wie viel Züge müssen gemacht werden damit wenigstens $\frac{3}{5}m - \frac{m}{50}$ und höchstens $\frac{3}{5}m + \frac{m}{50}$ weisse Kugeln erscheinen, wenn m die gesuchte Anzahl Züge ist, und die Wahrscheinlichkeit, dass soviel weisse Kugeln erscheinen, den Wert

$$W = \frac{1000}{1001}$$

haben soll?

Auflösung. Wir wenden die Formel 13 an:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2pqm}},$$

aus der wir γ zu bestimmen haben, indem

$$p = \frac{3}{5} \quad q = \frac{2}{5}$$

$$W = 0.999001$$

ist. Hiebei war r definiert durch

$$mp + r + \varepsilon > m' > mp - r + \varepsilon$$

also ist r der Unterschied zwischen der wahrscheinlichsten Anzahl zu ziehender Kugeln mp

und der zu erhoffender mit der Wahrscheinlichkeit W. Es ist also für unseren Fall

$$r = \frac{m}{50}$$

woraus

$$\gamma = \frac{\sqrt{m}}{50\sqrt{2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}} = \frac{\sqrt{m}}{20\sqrt{3}}$$

sich ergibt. Da nun

$$W = \Theta(\gamma) = 0{,}999001$$

sein soll, so liefert die Tabelle II

$$\gamma = 2{,}33$$

also gilt für m die Gleichung

$$2{,}33 = \frac{\sqrt{m}}{20\sqrt{3}}$$

daher

$$m = 3\,(46{,}6)^2$$
$$= 6514{,}68$$

d. h. bei 6515 Zügen wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens

$$\frac{3}{5}\,6515 - \frac{1}{50}\,6515 = 3909 - 130 = 3779$$

und höchstens

$$\frac{3}{5}\,6515 + \frac{1}{50}\,6515 = 3909 + 130 = 4039$$

weisse Kugeln aus der Urne gezogen werden, den Wert 0,999001 übersteigen.

Aufgabe 123. Wie viel Würfe muss man mit einem Würfel machen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens $\left(\frac{m}{6} - \frac{m}{100}\right)$ mal und höchstens $\left(\frac{m}{6} + \frac{m}{100}\right)$ mal die „1“ erscheint, wobei die Wahrscheinlichkeit hiefür

$$W = \frac{1}{2}$$

sein soll?

Auflösung. Wir benützen die Formel 13

$$W = \Theta(\gamma)$$

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2pqm}}$$

wobei

$$p = \frac{1}{6} \qquad q = \frac{5}{6}$$
$$r = \frac{m}{100}$$

ist.

Aus der Gleichung

$$W = \Theta(\gamma) = 0{,}5$$

liefert die Tabelle II

$$\gamma = 0{,}48$$

also folgt:

$$0{,}48 = 100 \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}$$

$$m = (48)^2 \frac{5}{18}$$

$$= 640$$

d. h. bei 640 Würfen ist die Wahrscheinlichkeit $W = \frac{1}{2}$ dafür, dass wenigstens

$$\frac{1}{6} 640 - \frac{1}{100} \cdot 640 = 106{,}9 - 6{,}4 = 100$$

und höchstens

$$\frac{1}{6} 640 + \frac{1}{100} \cdot 640 = 106{,}9 + 6{,}4 = 113$$

Würfe die „1" zeigen.

Aufgabe 124. Aus statistischen Daten schliesst man, dass die Mädchengeburten zu den Knabengeburten im Verhältnis 100 : 106 stehen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 94500 Geburten die Anzahl Knabengeburten um 900 mehr oder weniger beträgt, als obigem Verhältnisse nach sich ergeben sollten?

Erkl. 37. Man nimmt auch häufig statt des Verhältnisses 100 : 106 das Verhältnis 17 : 18 an.

Nebenrechnung.

$$\begin{array}{rcl} \log 2 \cdot 106 &=& 2{,}3263359 \\ \log 945 &=& 2{,}9754318 \quad +1 \\ \hline && 5{,}3017677 \\ \log \sqrt{2 \cdot 106 \cdot 945} &=& 2{,}6508838 \\ \hline \log 9 \cdot 206 &=& 3{,}2681097 \\ \log \sqrt{2 \cdot 106 \cdot 945} &=& 2{,}6508838 \quad - \\ \hline \log \gamma &=& 0{,}6172259 \\ \gamma &=& 4{,}14 \end{array}$$

Auflösung. Wir benützen die Formel 13

$$W = \Theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2pqm}}$$

in welcher wir

$$p = \frac{106}{206} \qquad q = \frac{100}{206}$$

$$m = 94500, \qquad r = 900$$

gegeben haben und also γ daher auch $\Theta(\gamma) = W$ bestimmen können. Es ist

$$\gamma = \frac{900 \cdot 206}{\sqrt{2 \cdot 100 \cdot 106 \cdot 94500}}$$

$$= \frac{9 \cdot 206}{\sqrt{2 \cdot 106 \cdot 945}}$$

$$= 4{,}14$$

Tabelle II liefert dann

$$W = \Theta(4{,}14) > 0{,}9999999$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Das vollständige

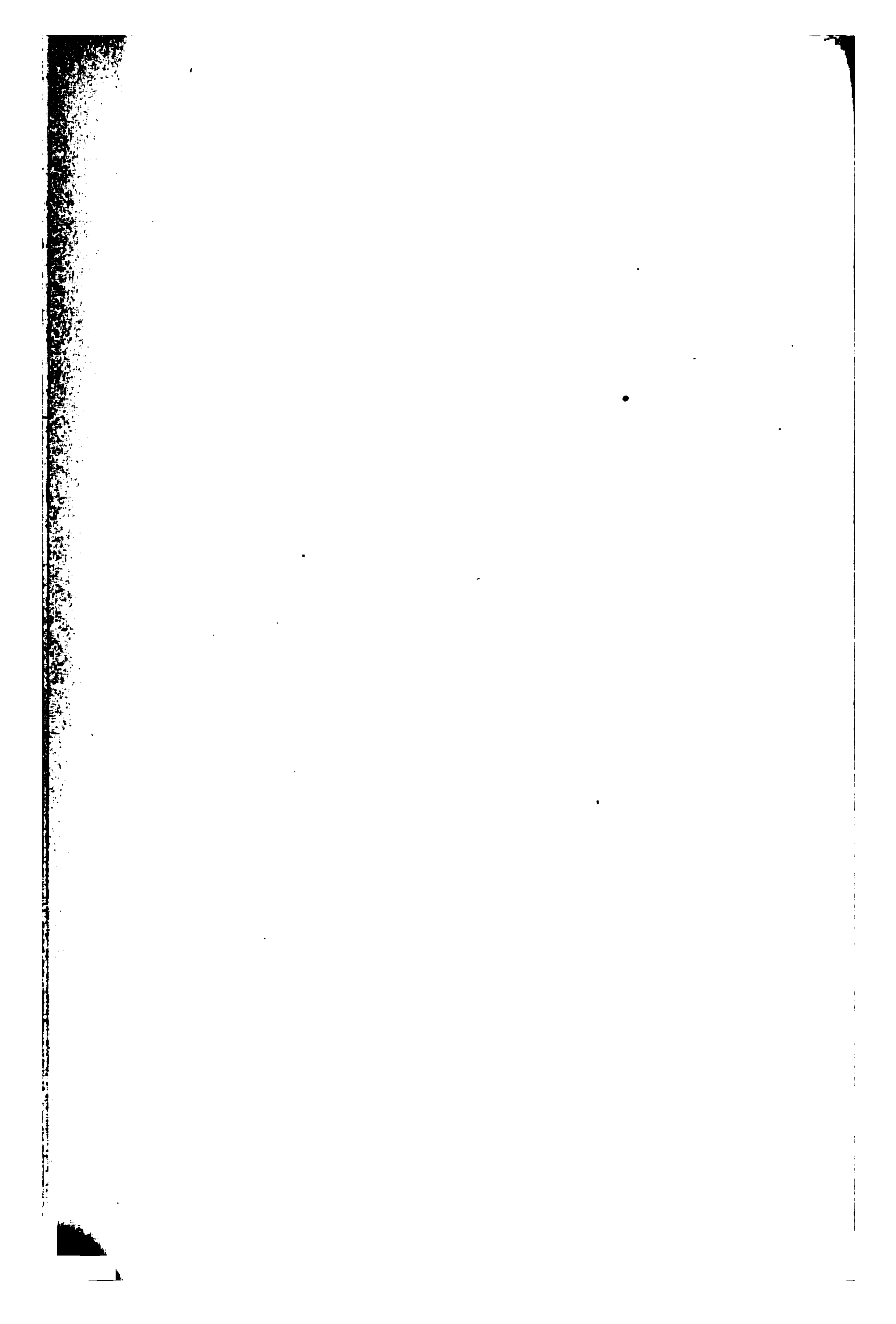
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kan[illegible]n jede Buchhandlung bezogen werden.

H[illegible]rlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

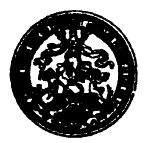
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

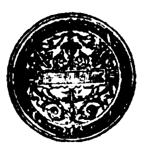


822. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung
Zweiter Teil.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei wiederholten Versuchen. Etc.
Forts. v. Heft 813. — Seite 129—144.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zweiter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei wiederholten Versuchen. Das Bernoullische Theorem. Die mathematische Erwartung, Wetten, Versicherungen.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 813. — Seite 129—144.

Inhalt:

Stuttgart 1890.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten.** Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht verges- n mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Be** s- **zweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft** verleiher d somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen** Verwertungen und **weiteren Forschungen** g n.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische f- gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der N n verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Ver r, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird deren F g thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshand**

Aufgabe 125. Das Verhältnis der Knaben- und Mädchengeburten wird mit 18 : 17 angenommen. Wie gross ist die Abweichung r der Knabengeburten bei 100000 Geburten vom obigen Verhältnis, damit die Wahrscheinlichkeit hiefür sich

$$W = \frac{1}{2}$$

ergibt?

Auflösung. Wir wenden die Formel 13 an:

$$W = \Theta(\gamma)$$

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2pqm}},$$

aus der wir r zu berechnen haben.

Es folgt nach Tabelle II aus

$$W = \Theta(\gamma) = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = 0{,}476936$$

und daher

$$r = 0{,}476936 \sqrt{2 \cdot \frac{18}{35} \cdot \frac{17}{35} \cdot 100000}$$

$$= 47{,}6936 \cdot \frac{6}{35} \sqrt{170}$$

$$= 106{,}6$$

d. h. bei 100000 Geburten ist die Wahrscheinlichkeit $W = \frac{1}{2}$, dass wenigstens:

$$\frac{18}{35} \cdot 100000 - 107 = 51429 - 107 = 51322$$

und höchstens

$$\frac{18}{35} \cdot 100000 + 107 = 51429 + 107 = 51536$$

Knabengeburten sind.

Erkl. 38. Der Wert von γ für den $\Theta(\gamma) = \frac{1}{2}$ wird später noch sehr wichtig werden, weshalb er, genauer berechnet, sich

$$= 0{,}476936$$

ergibt.

$$\log 0{,}476936 = 0{,}6784601 - 1$$

C. Über die mathematische Erwartung (Wetten, Versicherungen.)

Frage 23. Was versteht man unter mathematischer Erwartung oder Hoffnung?

Antwort. Unter mathematischer Erwartung versteht man das Produkt aus dem Werte einer Sache, diesen in Geldeinheiten ausgedrückt, in die Wahrscheinlichkeit diese Sache zu erhalten.

Ist also w die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man eine Sache vom Werte P erhält, so ist die mathematische Erwartung E gegeben durch die

Formel 14: $E = P \cdot w$

Frage 24. Was versteht man unter einer Wette!

Antwort. Unter einer Wette versteht man die Vereinbarung zweier Personen

dahingehend, dass die eine Person an die zweite einen Preis zahlt, wenn ein bestimmtes Ereignis eintritt, dass aber die zweite Person an die erste einen Preis zahlt, wenn das Ereignis nicht eintritt.

Frage 25. Was versteht man unter einer billigen Wette? (Besser: einer zu billigenden Wette?)

Antwort. Unter einer billigen Wette versteht man eine solche Wette, in welcher die mathematischen Hoffnungen beider Personen dieselben sind.

Ist also P der Preis, welchen die erste Person erhält, wenn das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit w ist, eintritt, und Q der Preis, den die zweite Person erhält, wenn das Ereignis nicht eintritt, so muss bei einer billigen Wette:

Formel 15: $$Pw = Q(1-w)$$

sein.

Anmerkung 27. Bei einer Wette, werden in der Regel die Preise, welche die Personen A und B zu gewinnen hoffen, vorher deponiert. Man nennt sie dann den Einsatz der Spieler. Hat also A die Wahrscheinlichkeit w für sich und B die Wahrscheinlichkeit $w' = 1 - w$ und setzt A den Preis Q, dagegen B den Preis P ein, so ist $Q = E_A$ der Einsatz von A und $P = E_B$ der Einsatz von B. Aus der Formel 14, die auch in der Form:

$$Q : P = w : w'$$

geschrieben werden kann, folgt dann:

$$E_A : E_B = w : w'$$

d. h. die Einsätze der Personen bei einer billigen Wette müssen sich wie die Wahrscheinlichkeiten verhalten, welche diese Personen für das Eintreffen des erwarteten Ereignisses besitzen.

Da $w + w' = 1$ ist, so folgt, wenn man $E_A + E_B = Q + P = G$ setzt:

Formel 16: $$E_A = w \,.\, G$$
$$E_B = w' \,.\, G$$

wobei G der ganze Gewinn ist, der auf der Wette steht.

Frage 26. Welche Person ist bei einer nicht billigen Wette im Nachteil?

Antwort. Offenbar diejenige Person, welche mehr zahlt, als ihr Einsatz bei einer billigen Wette betragen würde. Wird eine solche Wette wiederholt eingegangen, so lässt sich stets eine Anzahl m von Wetten angeben, bei welchen die im Nachteil befindliche Person, mit einer Wahrscheinlichkeit, die beliebig nahe der Einheit gebracht werden kann, einen Ver-

lust erleidet, der eine beliebig grosse Summe überschreitet, so klein auch der Überschuss ist, den die Person über den Einsatz der billigen Wette erlegt.

Denn sei w die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses G der Gewinnst und

$$e = w\,G + \delta$$

der Einsatz der Person A, wobei δ beliebig klein, aber von Null verschieden und positiv sein soll.

Nach dem Bernoullischen Theorem, Formel (13), ist:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

wobei

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2\,w\,(1-w)\,m}}$$

ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den m Versuchen das Ereignis wenigstens $(m\,w - r)$-mal und höchstens $(m\,w + r)$-mal eintritt.

Werden nun m Wetten gemacht, so ist der Einsatz von A bei diesen m Wetten:

$$m\,e = m\,w\,G + m\,\delta$$

Das Ereignis möge nun $(m\,w + r)$-mal eintreten, dann gewinnt A im ganzen:

$$G\,(m\,w + r)$$

also höchstens

$$G\,(m\,w + r)$$

und wenigstens

$$G\,(m\,w - r)$$

mit der Wahrscheinlichkeit W.

Der Verlust von A ist also wenigstens:

$$m\,e - G\,(m\,w + r) = \delta\,m - G\,r$$

und höchstens

$$m\,e - G\,(m\,w - r) = \delta\,m + G\,r$$

mit einer Wahrscheinlichkeit W.

Wir nehmen nun

$$r = \rho\sqrt{m}$$

dann wird

$$\gamma = \frac{\rho}{\sqrt{2\,w\,(1-w)}}$$

und wir können stets ρ so wählen, dass $\gamma > 4$ wird. Ist dies geschehen, dann ist

$$W > 0{,}9999999$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Verlust von A wenigstens

$$\delta m - G \rho \sqrt{m}$$

ist. Wie klein nun auch δ sein mag, kann man m stets so gross machen, dass

$$\delta m - G \rho \sqrt{m} > C$$

wird, wobei C eine beliebig grosse Summe ist, es ist hiezu nur nötig, wie nebenstehende Rechnung zeigt:

$$m > \frac{1}{2\delta^2} \left\{ 2\delta C + G^2\rho^2 + G\rho \sqrt{4\delta C + G^2\rho^2} \right\}$$

anzunehmen.

Nebenrechnung:

Setzt man $\sqrt{m} = x$, so folgt aus

$$\delta x^2 - G_\rho x > C$$

$$(2\delta x - G_\rho)^2 > 4\delta C + G^2\rho^2$$

$$2\delta x > G_\rho + \sqrt{4\delta C + G^2\rho^2}$$

$$4\delta^2 x^2 > 4\delta C + 2G^2\rho^2 + 2G_\rho \sqrt{4\delta C + G^2\rho^2}$$

also

$$x^2 > \frac{1}{2\delta^2} \left\{ 2\delta C + G^2\rho^2 + G_\rho \sqrt{4\delta C + G^2\rho^2} \right.$$

Frage 27. Es setzen mehrere Personen: A, B, C, . . . ein, um die Summe G zu gewinnen. Die ihnen zukommenden Wahrscheinlichkeiten sind w_1, w_2, w_3 . . . . w_k, wie werden ihre Einsätze sein müssen, damit die Wette eine billige ist?

Antwort: Die Einsätze müssten ihren mathematischen Erwartungen gleich sein. Daher ist der Einsatz:

von A . . . . $e_1 = G w_1$

„ B . . . . $e_2 = G w_2$

„ C . . . . $e_3 = G w_3$

u. s. w. Sind w_1, w_2, w_3 . . w_k die Wahrscheinlichkeit für denEintritt der Ereignisse der einzelnen Personen und

$$w_1 + w_2 + w_3 + \,.\,.\, + w_k = 1,$$

so ergibt sich

$$e_1 + e_2 + \,.\,.\, + e_k = G$$

der Gewinnst ist dann die Summe aller Einsätze.

Frage 28. Eine Person wettet auf auf das Eintreffen irgend eines der Ereignisse E_1, E_2 . . . E_k, denen die Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2 . . . w_k zukommen und zwar sind als Preise ausgesetzt: G_1, G_2 . . . G_k, wenn das Ereignis

Antwort. Der Einsatz von A muss die Summe seiner mathematischen Erwartungen sein, d. h. es ist

E_1; E_2 resp. E_k eintritt. Wie bestimmt sich der Einsatz von A, wenn die Wette billig sein soll.

Formel 17:

$$e = w_1\ G_1 + w_2\ G_2 + \ldots + w_k\ G_k$$

Anmerkung 28. Der Einsatz von der Person B, welche auf das Nichteintreffen der Ereignisse wettet, müsste dann sein

$$e' = w_1'\ G_1 + w_2'\ G_2 + \ldots . + w_k'\ G_k$$

wobei $w_i + w_i' = 1$ ist.

Frage 29. Mehrere Personen spielen um einen Einsatz, den der Gewinnende erhält. Sie brechen aber das Spiel ab, bevor es entschieden ist, wer gewonnen hat. Wie ist der Einsatz zu teilen?

Antwort. Der Einsatz stellt die Summe der mathematischen Erwartungen sämtlicher Spieler dar, also hat billiger Weise jeder derselben einen solchen Anspruch auf den Einsatz, als seiner mathematischen Erwartung entspricht. Der Einsatz ist daher in dem Verhältnisse zu teilen, in welchem die Wahrscheinlichkeiten der Spieler stehen, das Spiel zu gewinnen.

Haben die Spieler beim Abbrechen des Spieles die Wahrscheinlichkeiten w_1, $w_2 \ldots w_k$ das Spiel zu gewinnen, wenn es fortgesetzt wird, und ist G der Preis, der gewonnen wird, so sind ihre mathematischen Hoffnungen:

$$\begin{aligned} H_1 &= w_1\ G \\ H_2 &= w_2\ G \\ &\vdots \\ H_k &= w_k\ G \end{aligned}$$

und da

$$w_1 + w_2 + \ldots . + w_k = 1$$

ist, nachdem einer der Spieler gewinnen muss, so ist

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_k = G$$

und

Formel 18: $H_1 : H_2 : \quad : H_k = w_1 : w_2 : \quad : w_k$

gibt die Art der Verteilung des Einsatzes an.

Frage 30. Was versteht man unter dem Risiko einer Person, die eine Wette eingegangen ist?

Antwort. Unter dem Risiko einer Person, die eine Wette eingegangen ist,

versteht man das Produkt aus der Summe, welche die Person bei der Wette verlieren kann, in die Wahrscheinlichkeit diesen Verlust zu erleiden.

Ist also w die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, auf dessen Eintreffen A wettet und den Einsatz e macht, so ist sein Risiko

Formel 19: $R = e . w'$,

wenn $w' = 1 - w$ die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist.

Zahlt die Person B im Falle A gewinnt dieser den Preis G, so ist der Verlust von B, da sie den Einsatz e erhält, nachdem der Einsatz geschehen, nur mehr $G - e$ und daher ist das Risiko von B:

Formel 19': $R' = (G - e)\, w$

Anmerkung 29. Der erste, der das Risiko in dieser Weise betrachtete, war J. N. Tetens, Professor in Kiel: „Einleitung zur Berechnung der Leibrenten etc." 2. Teil. 1786. Unter den Werken späterer Autoren über diesen Gegenstand ist besonders hervorzuheben: „Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften"; Hannover 1885, von Prof. Dr. T. Wittstein, welchem vortrefflichen Werke manches hier folgende entnommen ist.

Anmerkung 30. Ist die Wette eine billige, so ist das Risiko für beide kontrahierende Parteien gleich gross. Denn nach Formel 16 ist der Einsatz der Person A:

$$e = w . G$$

also folgt aus Formel 19

$$R = w\, w'\, G$$

und aus Formel 19'

$$R' = (1 - w)\, w\, G = w' . w\, G = R.$$

Umgekehrt ist jede Wette, bei der das Risiko beider Parteien dasselbe ist, eine billige Wette. Denn ist w die Wahrscheinlichkeit für die Person A, die Wette zu gewinnen, und e ihr Ersatz, während w' und e' dieselbe Bedeutung für die andere Person haben, so ist nach Formel 19 das Risiko für die Person A:

$$R_A = e\, w'$$

das für die Person B:

$$R_B = e'\, w$$

Ist nun

$$R_A = R_B$$

vorausgesetzt, so folgt

$$e : e' = w : w'$$

was nach Formel 16 eine billige Wette definiert.

Anmerkung 31. Da die Person A, welche den Einsatz e leistet, um den Preis G zu gewinnen, nachdem der Einsatz geschehen, nur mehr $(G - e)$ gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit w, so stellt nach Formel 19' R' die mathematische Gewinnsterwartung des Spielers A dar, daher ist das Risiko eines der Spieler gleich der mathematischen Gewinnsterwartung des anderen.

Frage 31. Eine Person A setzt auf das Eintreffen der Ereignisse $E_1, E_2 .. E_k$ gewisse Summen $e_1, e_2 ... e_k$ ein, um die Preise $G_1, G_2, ... G_k$, welche auf das Eintreffen dieser Ereignisse ausgesetzt sind, zu gewinnen.

Welches ist das Risiko der Person A, wenn $w_1, w_2 ... w_k$ die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse sind? $(w_1 + w_2 + ... w_k = 1)$

Antwort. Da A die Einsätze $e_1, e_2 .. e_k$ macht und die Gewinnste $G_1, G_2 ... G_k$ erhält, wenn die Ereignisse $E_1, E_2 ... E_k$ eintreten, so sind seine Verluste die positiven unter den Differenzen:

$$e_1 - G_1 \quad e_2 - G_2 \; ... \; e_k - G_k$$

und zwar sind diese Verluste mit den Wahrscheinlichkeiten

$$w_1, \quad w_2 \; .... \; w_k$$

zu erwarten, daher ist das Risiko von A:

Formel 20: $R = \sum\limits_{+}{}_i \, (e_i - G_i) \, w_i$

wobei $\sum\limits_{+}{}_i$ bedeuten soll, dass diejenigen Summanden blos zu nehmen sind, die positiv sind.

Analog findet sich das Risiko seines Gegners B:

Formel 20': $R' = \sum\limits_{+}{}_i \, (G_i - e_i) \, w_i$

wobei wieder nur die positiven Differenzen $G_i - e_i$ in Betracht zu ziehen sind, denn die negativen stellen stets einen Gewinn von B dar, indem der Einsatz von A grösser ist als der Preis, der auf das Ereignis aussteht.

Frage 32. Was versteht man unter dem moralischen Wert einer Erwartung?

Antwort. Unter dem moralischen Wert einer Erwartung versteht man die Bedeutung der erwarteten Summe für eine Person. Diese richtet sich nach dem Vermögen der Person selbst. Denn der Zuwachs von 10 Mark bei einer Person, die 100 Mark im Vermögen hat, hat eine andere Wichtigkeit, als bei einer Person, die 100000 Mark im Vermögen besitzt.

Frage 33. Wie wird der moralische Wert einer Summe für eine Person von bestimmtem Vermögen mathematisch definiert?

Antwort. Diese Definition ist nicht feststehend und sind verschiedene Annahmen gemacht worden.

Erkl. 39. Bouffon, französischer Mathematiker, stellt diese Definition in seinem Werke „Essais d'arithmetique morale“ auf.

Bezüglich Daniel Bernoulli vergleiche die Erklärung 34.

Bouffon definiert den moralischen Wert einer Summe s für eine Person, die das Vermögen S besitzt, durch den Quotienten $\frac{s}{S}$.

Daniel Bernoulli lässt diese Definition nur für unendlich kleine Zuwächse gelten und betrachtet den moralischen Wert für einen endlichen Zuwachs als die Summe der Inkremente.

Ist also M der moralische Wert einer Summe, dM das Inkrement davon, so setzt Daniel Bernoulli

$$dM = k\frac{dx}{x}$$

wenn dx der Vermögenszuwachs für das Vermögen x bedeutet. Es wird dann, wenn das ganze Vermögen der Person ursprünglich V war und um v sich änderte, der moralische Wert

$$M = k\int_V^{V+v}\frac{dx}{x}$$

also:

Formel 21: $M = k\log\frac{V+v}{V}$

Erkl. 40. Vergleiche die Überführung der Logarithmen für verschiedene Basen in Kleyers Lehrbuch der Logarithmen.

wobei der natürliche Logarithmus genommen werden soll. Es kann aber auch der Briggsche Logarithmus genommen werden, indem man den Modul $\frac{1}{\log_{10}e}$ in k hineinnimmt.

Frage 34. Wie bestimmt man den moralischen Wert einer Summe v, die mit einer Wahrscheinlichkeit w erwartet wird?

Antwort. Der moralische Wert einer Vermögensänderung v bei dem Vermögen V ist, wenn die Änderung v mit der Wahrscheinlichkeit w erwartet wird, das Produkt aus w in dem moralischen Wert der sicher erwarteten Summe. Also ist, da $k = 1$ gesetzt werden kann:

Formel 22: $M = w \,.\, \log\frac{V+v}{V}$

Werden mehrere Summen $v_1, v_2 \ldots v_k$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2 \ldots w_k$ erwartet, so ist der moralische Wert die Summe der einzelnen moralischen Werte, also gilt

$$\textbf{Formel 22a:} \quad M = \sum_1^k w_i \, \mathrm{l} \frac{V + v_i}{V}$$

Anmerkung 32. Die Formeln geben, wenn v positiv ist, also ein wirklicher Vermögenszuwachs stattfindet, für M einen positiven Wert, da $V + v > V$ ist, also auch der Logarithmus positiv ist. Ist dagegen v negativ, tritt also eine Vermögensabnahme ein, so ist $V + v < V$, also ist der Logarithmus negativ, mithin auch M und stellt daher den moralischen Wert eines Verlustes dar. Es ist also der moralische Verlust M' bei einer Vermögensabnahme um v mit der Wahrscheinlichkeit w, wenn M' der positive Wert ist,

$$\textbf{Formel 22':} \qquad M' = -w . \log \frac{V - v}{V}$$

Anmerkung 33. Diese Definitionen des moralischen Wertes passen sich ganz gut dem gewöhnlichen Sprachgebrauche an. Der moralische Wert einer bestimmten Summe ist desto grösser, je kleiner das ursprüngliche Vermögen ist und desto kleiner, je grösser das ursprüngliche Vermögen war. Für einen Menschen, dessen ganzes Vermögen 100 Mark ist, ist ein Zuwachs von 10 Mark von grosser Bedeutung. Hingegen ist ein Vermögenszuwachs von 10 Mark für einen Menschen, der 100000 Mark besitzt, von sehr geringer Bedeutung. Der Wert von M aus Formel 21 kann aber auch geschrieben werden:

$$M = \left\{ \frac{v}{V} - \frac{v^2}{2V^2} + \frac{v^3}{3V^3} - \ldots\ldots \right\}$$

wenn $\frac{v}{V} < 1$ ist; woraus ersichtlich, dass in erster Annäherung der moralische Wert dem Quotienten $\frac{v}{V}$ proportional ist.

Es wäre gegen die Formel 21 nur einzuwenden, dass sie versagt, wenn $V = o$ ist, d. h. wenn der Mensch gar kein Vermögen besitzt. Dies wäre aber, sagt Bernoulli, ein Mensch, der gerade Hungers stirbt, denn jeder Mensch, der lebt, hat irgend ein Vermögen, von dem er lebt, im äussersten Falle blos seine Arbeitskraft, die ihm Lebensunterhalt verschaffen kann.

Anmerkung 34. Aus der Definition des moralischen Wertes eines zu erwartenden Gewinnstes ergibt sich, dass bei jedem Spiel der moralische Wert des Verlustes grösser ist, als der moralische Wert des Gewinnstes. Denn wird der Gewinn v mit der Wahrscheinlichkeit w erwartet, so muss bei einem billigen Spiel der Einsatz $e = vw$ sein, so dass also der Vermögenszuwachs durch den Gewinn $v - e = vw'$ ist. Dann ist der moralische Wert dieses Gewinnes nach Formel 22:

$$M = w . \log \frac{V + vw'}{V}$$

$$= w . \log \left(1 + \frac{vw'}{V}\right) = w \left\{ \frac{vw'}{V} - \frac{v^2 w'^2}{2V^2} + \ldots \right\}$$

wobei $vw' < V$ vorausgesetzt wird. Da aber durch den Einsatz das Vermögen sich um $e = vw$ vermindert und $w' = 1 - w$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, diesen Verlust zu erleiden, so ist nach Formel (22') der moralische Verlust

$$M' = -w' \log \frac{V - vw}{V}$$

$$= -w' \log \left(1 - \frac{vw}{V}\right) = -w' \left\{ -\frac{vw'}{V} - \frac{v^2 w^2}{2V^2} - \ldots \right\}$$

da $V > vw$ sein muss, indem der Spieler nicht mehr einsetzen kann als er besitzt. Es ist nun

$$M' - M = \frac{v^2 w w'}{2V^2} + \dots$$

also ist $M' > M$.

Frage 35. Was versteht man unter der moralischen Hoffnung nach Laplace?

Erkl. 41. Diese Definition stellt Laplace in seinem Werke „Théorie analytique des Probabilités" auf.

Antwort. Erwartet eine Person, deren Vermögen V ist, die Vermögenszuwächse $v_1, v_2 \dots v_k$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2 \dots w_k$, wobei $w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1$ ist, so definiert Laplace die mathematische Hoffnung durch die Formel:

Formel 23: $$H = (V + v_1)^{w_1} (V + v_2)^{w_2} \dots (V + v_k)^{w_k} - V$$

Ist H positiv, so ist es die moralische Hoffnung eines Gewinnes, ist H negativ, so ist es die moralische Hoffnung eines Verlustes.

Anmerkung 35. Man kann für kleine Werte von $\frac{v}{V}$ setzen

$$H = V^{w_1 + w_2 + \dots w_k} \left(1 + \frac{v_1}{V}\right)^{w_1} \left(1 + \frac{v_2}{V}\right)^{w_2} \dots \left(1 + \frac{v_k}{V}\right)^{w_k} - V$$

$$= V\left(1 + \frac{w_1 v_1}{V}\right)\left(1 + \frac{v_2 w_2}{V}\right) \dots \left(1 + \frac{v_k w_k}{V}\right) - V$$

$$= v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_k w_k + \frac{w_1 w_2 v_1 v_2}{V} + \dots$$

und daher, wenn e die mathematische Hoffnung ist, nach Formel 17

$$H = e + w_1 w_2 \frac{v_1 v_2}{V} + \dots$$

so dass für kleine Werte $\frac{v_1}{V}$ sich die moralische Hoffnung von der mathematischen wenig unterscheidet.

Anmerkung 36. Bezeichnet man mit X den Wert des Vermögens, welches, wenn es gewiss wäre, denselben moralischen Wert hätte, wie die Gewinne $v_1, v_2 \dots v_k$, so wäre nach Formel (22'):

$$\log \frac{X}{V} = w_1 \log \frac{V + v_1}{V} + w_2 \log \frac{V + v_2}{V} + \dots + w_k \log \frac{V + v_k}{V}$$

$$= \log \frac{(V + v_1)^{w_1} (V + v_2)^{w_2} \dots (V + w_k)^{w_k}}{V^{w_1 + w_2 + \dots + w_k}}$$

oder da $w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1$, so ergibt sich dieser Wert

Formel 24: $$X = (V + v_1)^{w_1} (V + v_2)^{w_2} \dots (V + w_k)^{w_k}$$

also

$$H = X - V$$

die moralische Hoffnung.

Gelöste Aufgaben über die mathematische Erwartung, Wetten und Versicherungen.

Aufgabe 126. Welches ist die mathematische Hoffnung eines Lotteriespielers, der ein bestimmtes Terno setzt, wenn sein Einsatz 4800fach als Gewinn ausgesetzt ist?

Auflösung. Nach Aufgabe 7 ist die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Terno

$$w = \frac{1}{11784}$$

Setzt der Spieler also G Geldeinheiten ein, so ist seine mathematische Erwartung nach Formel 14

$$E = \frac{4800}{11784} G$$
$$= 0{,}407332\, G$$

Aufgabe 127. Ein Diamant vom Gewichte a wird in zwei Stücke zerschlagen, welches ist die mathematische Erwartung des Wertes der zerschlagenen Diamanten, wenn der Wert des Diamantenstückes dem Quadrate seines Gewichtes proportioniert ist.

Auflösung. Ist P der Preis des ganzen Diamanten, so wird $P = k a^2$ sein, wo k eine Constante ist. Der Diamant möge nun in die Stücke vom Gewichte x und $(x - a)$ zerschlagen werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gerade ein Stück vom Gewichte x oder $x + dx$ vom ganzen Diamanten abfällt, ist nach den Aufgaben 16 u. 17: $\frac{dx}{a}$. Die mathematische Erwartung des Wertes des Stückes ist also $kx^2 \frac{dx}{a}$ und die für das zweite Stück $k(x-a)^2 \frac{dx}{a}$, also ist die mathematische Hoffnung für beide Stücke

$$k x^2 \frac{dx}{a} + k(x-a)^2 \frac{dx}{a}$$
$$= \frac{k}{a}(2x^2 - 2ax + a^2)dx$$

Nun kann x jeden Wert zwischen o und a annehmen, es wird also die mathematische Erwartung gleich sein der Summe aller derart erhaltenen mathematischen Erwartungen, d. h. es ist

$$E = \frac{k}{a}\int_o^a (2x^2 - 2ax + a^2)\, dx$$
$$= \frac{k}{a}\left(\frac{2}{3} a^3 - a \,.\, a^2 + a^2 \,.\, a\right)$$
$$= \frac{2}{3} k a^2$$
$$= \frac{2}{3} P$$

d. h. die mathematische Erwartung ist nur $\frac{2}{3}$ des Preises des ganzen Diamanten.

Aufgabe 128. Zwei Personen A und B spielen Würfel. B verpflichtet sich dem A soviel Mark zu zahlen, als A mit dem Würfel Punkte aufwirft. Wie gross ist der Einsatz von A, und wie gross ist das Risiko des Spieles?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit irgend eine bestimmte der Seiten des Würfels aufzuwerfen ist $w = \frac{1}{6}$.

Da nun A die Gewinnste 1, 2, 3, 4, 5, 6 Mark erhält, je nachdem er 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkte wirft, so ist seine mathematische Erwartung nach Formel 17:

$$e = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6$$
$$= 3{,}5$$

Mithin muss bei einem billigen Spiele A den Einsatz 3,5 Mark leisten.

Das Risiko von A berechnet sich folgendermassen: In den Fällen, in welchen er 1, 2, 3 Punkte wirft, verliert er $3{,}5 - 1 = 2{,}5$, $3{,}5 - 2 = 1{,}5$ und $3{,}5 - 3 = 0{,}5$ Mark, in den übrigen drei Fällen gewinnt er stets. Da die Verluste aber alle die Wahrscheinlichkeit $w = \frac{1}{6}$ haben, so ist sein Risiko nach Formel 20:

$$R = (2{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5)\frac{1}{6}$$
$$= 0{,}75 \text{ Mark}$$

Dahingegen verliert B im Falle A die Punktzahl 4, 5, 6, wirft $4 - 3{,}5 = 0{,}5$, $5 - 3{,}5 = 1{,}5$ und $6 - 3{,}5 = 2{,}5$ Mark, da hiefür auch die Wahrscheinlichkeiten $w = \frac{1}{6}$ gelten, so ist das Risiko von B

$$R' = (0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5)\frac{1}{6}$$
$$= 0{,}75 \text{ Mark}$$

genau so gross, wie das von A.

Anmerkung 37. Dieses Beispiel führt schon Tetens an. Vgl. die Anmerkung 30.

Aufgabe 129. Ein Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit p, auf sein Eintreffen macht A den Einsatz e und erhält den Preis g von B, wenn das Ereignis eintritt. Wenn nun A auf das m-malige Eintreffen dieses Ereignisses setzen will, wie gross ist das Risiko? Hiebei wird vorausgesetzt, dass das Eintreffen des Ereignisses das folgende Eintreffen nicht beeinflusst.

Auflösung. Dass das Ereignis bei m Versuchen $(m - k)$mal eintritt hat die Wahrscheinlichkeit nach Formel 8 den Wert:

$$w_k = \binom{m}{k} p^{m-k} q^k$$

wobei $q = 1 - p$ die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist.

Wenn aber das Ereignis $(m-k)$ mal eintritt und k mal nicht eintritt, dann ist $(m-k)\,g$ der Gewinn und ke der Verlust von A, daher sein Gewinn blos:

$$g_k = (m-k)\,g - k\,e$$
$$= m\,g - (g+e)\,k$$

Die mathematische Erwartung von A oder das Risiko von B ist also für diesen Fall $g_k w_k$ und daher ist das ganze Risiko von B:

$$R = \sum_{o}^{m}{}_k\, g_k\, w_k$$

$$R = \sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} p^{m-k} q_k \left\{m\,g - (g+e)\,k\right\}$$

$$= m\,g \sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} p^{m-k} q^k - (g+e) \sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} k\, p^{m-k} q^k$$

Beachtet man, dass nach dem binomischem Lehrsatze

$$(p+q)^m = \sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} p^{m-k} q^k$$

ist, und dass $p+q=1$, so folgt

$$R = m\,g - (g+e) \sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} p^{m-k} q^k . k$$

Die zweite Summe bestimmen wir folgendermassen. Es ist

$$(p+q\,t)^m = \sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} p^{m-k} q^k t^k$$

und

$$\frac{d}{d\,t}\,(p+q\,t)^m = \frac{d}{d\,t}\left\{\sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} p^{m-k} q^k\, t^k\right\}$$

also wenn man die Differentiationen ausführt:

$$m\,(p+qt)^{m-1}.q = \sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} p^{m-k} q^k\, t^{k-1}.\; k$$

Setzt man hierin $t=1$ und beachtet, dass $p+q=1$ ist, so folgt:

$$m\,q = \sum_{o}^{m}{}_k \binom{m}{k} p^{m-k} q^k .\; k$$

also ist

$$R = m\,g - (g+e)\,m\,q$$

oder

$$R = m\,g\,p - m\,e\,q$$

das Risiko; ein Resultat zu dem man auch so

gelangen kann: A hat die Wahrscheinlichkeit p den Preis g zu gewinnen und die Wahrscheinlichkeit q den Einsatz e zu verlieren. Seine mathematische Hoffnung bei einem Spiele ist daher

$$gp - eq$$

und da die m Spiele von einander unabhängig sind, so ist seine mathematische Hoffnung für dieselben

$$m(gp - eq),$$

welches auch das Risiko seines Gegners B ist.

Ist die Wette eine billige, so ist

$$e = gp$$

und dann folgt

$$R = mgp^2.$$

Aufgabe 130. In einer Urne sind 3 weisse und 5 schwarze Kugeln. A erhält 2 Mark, wenn er eine weisse Kugel zieht, zahlt aber 1 Mark, wenn er eine schwarze herauszieht. Ist das Spiel ein billiges?

Auflösung. Man kann das so auffassen, dass auf das Ziehen einer weissen Kugel ein Preis von 3 Mark gesetzt ist und, dass A als Einsatz 1 Mark leistet. Denn dann erhält er zwar 3 Mark, wenn er eine weisse Kugel zieht, da er aber 1 Mark einsetzte, so ist sein Gewinn blos 2 Mark. Da die Wahrscheinlichkeit eine weisse Kugel zu ziehen

$$w = \frac{3}{8}$$

ist, so sollte sein Ersatz, wenn die Wette billig sein soll nach Formel 16

$$E_A = 3 \cdot \frac{3}{8} = 1 + \frac{1}{8}$$

sein. Die Wette ist daher für A vorteilhaft, für seinen Gegner also nachteilig.

Aufgabe 131. Wenn A bei dem Ziehen einer weissen Kugel a Mark erhält, wie viel muss er bei dem Ziehen einer schwarzen Kugel einzahlen, damit die Wette billig ist?

Auflösung. Ist p die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel, q die für das Ziehen einer schwarzen, und zahlt A bei dem letzteren x Mark ein, so kann $a+x$ als der Preis betrachtet werden, der auf das Ziehen einer weissen Kugel gesetzt ist, während x der Einsatz von A ist. Nach Formel 16 ist dann für x die Gleichung

$$x = (a + x)\,p$$

zu erfüllen; oder

$$xq = ap$$

also

$$x = a\,\frac{p}{q}$$

Aufgabe 132. A und B spielen eine Partie. Sie brechen das Spiel ab, bevor der Einsatz von 32 Mark gewonnen wurde. Damit A diesen Preis gewinnt, müsste er noch 3 Partien, B blos 2 Partien gewinnen. Beide haben dieselbe Wahrscheinlichkeit eine Partie zu gewinnen. In welchem Verhältnisse muss der Preis von 32 Mark unter dieselben verteilt werden?

Auflösung. Nach den Auseinandersetzungen der Frage 29 müssen die Spieler den Einsatz in dem Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten das Spiel zu gewinnen teilen. Nach Aufgabe 76 hat A die Wahrscheinlichkeit

$$w = p^3[1 + 3\,q]$$

und B die Wahrscheinlichkeit

$$w' = q^2\left[1 + 2\,p + \frac{3.2}{1.2}p^2\right]$$

das Spiel zu gewinnen. Da nun $p = q = \frac{1}{2}$ ist, so folgt

$$w = \frac{5}{2^4}.$$

$$w' = \frac{11}{2^4}.$$

Daher erhält

$$A \ldots\ldots\ldots \frac{5}{16}.32 = 10 \text{ Mark}$$

$$B \ldots\ldots\ldots \frac{11}{16}.32 = 22 \text{ „ „}$$

vom Einsatze.

Anmerkung 38. Mit einer ähnlichen Aufgabe nahm die Wahrscheinlichkeitsrechnung ihren Anfang. Chevalier de Meré legte im Jahre 1656 dem Mathematiker Pascal das Problem vor: In welchem Verhältnisse müssen zwei Spieler den Einsatz teilen, wenn sie das Spiel vor der Entscheidung abbrechen? Pascal löste dasselbe mittels seiner Triangulzahlen (Binomial-Coëfficienten unter Voraussetzung $p = q = \frac{1}{2}$), teilte es Fermat mit, der eine allgemeine Lösung des Problems lieferte. Darüber entstand ein Streit, in welchem aber Pascal bald erkannte, dass die Methode von Fermat besser ist, um verallgemeinert zu werden. Von da ab beschäftigten sich die Mathematiker auch mit den Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bis die Brüder Bernoulli einen ganzen Traktat betitelt *„Ars conjectandi“* im Jahre 1713 (Erkl. 34) herausgaben. Von den späteren ist besonders Laplace zu nennen, der seine Theorie analytique des Probabilité im Jahre 1809 zum erstenmal und 1821 schon zum drittenmal herausgab. Dies Werk wurde für alle folgenden fundamental und enthält als Einleitung eine ausgezeichnete philosophische Betrachtung über das Wesen der Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 133. Es ist die mathematische Hoffnung des Banquiers im Pharaospiele zu bestimmen, wenn er noch a Blätter in der Hand hält, unter denen sich $n > 2$ Karten des Spielers vorfinden, und der Spieler den Einsatz e gemacht hat.

Erkl. 42. Bezüglich der Regeln des Pharaospieles siehe die Erklärung 29.

Auflösung. So lange die Karten des Spielers nicht in einem Abzuge erscheinen, ist die Gewinnst- und Verlusthoffnung des Banquiers gleich gross, dieselben heben sich also auf. Es bleibt für ihn aber noch die Hoffnung, den halben Einsatz einzuziehen, wenn zwei der Karten des Spielers in einem Abzug auftreten. Ist p die Wahrscheinlichkeit hiefür, so ist seine Hoffnung

$$H = \frac{1}{2}\,e\,p$$

Der Wert von p bestimmt sich nach Aufgabe 77:

$$p = \frac{n(n-1)}{a(a-1)} \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\binom{a-n}{2i-2}}{\binom{a-n}{2i-2}}$$

wobei der Wert von r zu bestimmen ist.

Offenbar ist das Spiel zu Ende mit dem r^{ten} Abzuge, wenn der Banquier nach $r-1$ Abzügen nur noch die n Karten des Spielers in der Hand hat, wenn n gerade ist, oder die n Karten des Spielers und noch 1 weitere Karte, wenn n ungerade ist. [Nachdem $2(r-1)$ Karten von den 52 Karten des Spieles auf den Tisch gelegt wurden, muss eine gerade Anzahl von Karten in der Hand des Banquier bleiben.]

Denn im ersten Fall müssen im r^{ten} Abzuge zwei Karten des Spielers auftreten. Im zweiten Fall aber treten entweder im r^{ten} Abzuge 2 Karten des Spielers auf, oder es tritt eine seiner Karten und eine andere auf, wodurch entweder er oder der Banquier gewinnt, je nachdem seine Karte als zweite oder erste erscheint.

Ist also n gerade, so müssen nach $(r-1)$ Abzügen noch n Karten übrig bleiben, daher ist

$$a - 2(r-1) = n$$

oder

$$r = \frac{a-n+2}{2}$$

ist aber n ungerade, so muss

$$a - 2(r-1) = n + 1$$

oder

$$r = \frac{a-n+1}{2}$$

sein.

Da nun $n > 2$ ist und das $(r+1)^{te}$ Glied in der Summe für p die Form hätte

$$\frac{\binom{a-n}{2r+1}}{\binom{a-2}{2r+1}} = \frac{\binom{a-n}{a-n+2}}{\binom{a-2}{a-n+2}} \quad \text{wenn } n \text{ gerade}$$

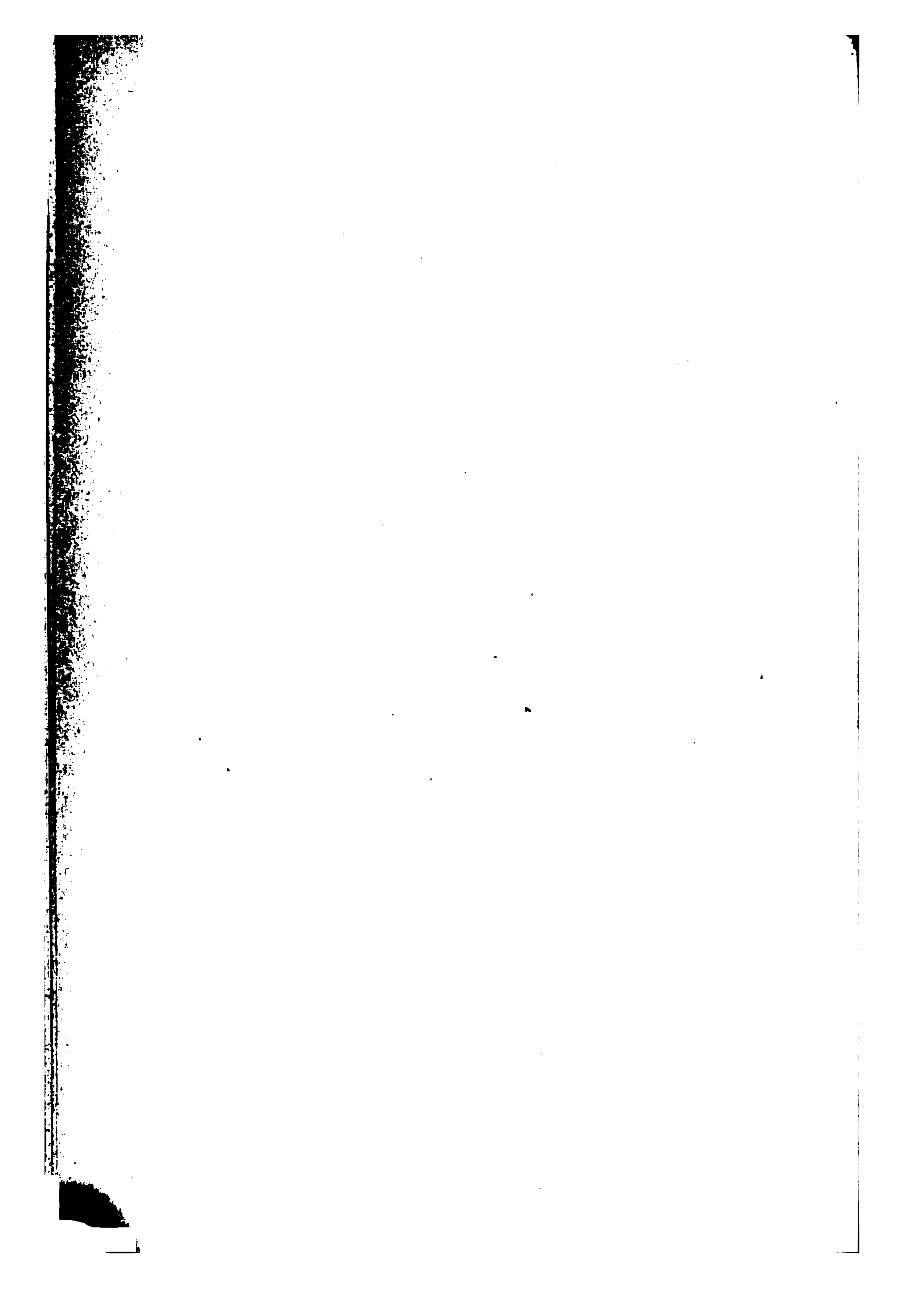
$$= \frac{\binom{a-n}{a-n+1}}{\binom{a-2}{a-n+1}} \quad \text{wenn } n \text{ ungerade}$$

ist und jedes dieser Glieder den Wert Null hat, da

$$\binom{a-n}{a-n+2} = \frac{(a-n)(a-n-1)\ldots 0 \, . -1}{1 \, . \, 2 \ldots\ldots\ldots (a-n+2)} = 0$$

$$\binom{a-n}{a-n+1} = \frac{(a-n)(a-n-1)\ldots . 1 \, . \, 0}{1 \, . \, 2 \ldots\ldots\ldots (a-n+2)} = 0$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



823. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Zweiter Teil.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei wiederholten Versuchen. Etc.
Forts. v. Heft 822. — Seite 145—160.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zweiter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei wiederholten Versuchen. Das Bernoullische Theorem. Die mathematische Erwartung, Wetten, Versicherungen.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 822. — Seite 145—160.

Inhalt:

Stuttgart 1890.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben** aus dem **Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl der Hefte** erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — **nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet** — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden der Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergess—n mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Be** s- zweigen **vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleiher d somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** g n.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische f- gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der N n verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verf. r, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erl g thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlu**

ist, so bricht die Reihe von selbst ab und man hat

$$H = \frac{1}{2} e \frac{n(n-1)}{a(a-1)} \sum \frac{\binom{a-n}{2i-2}}{\binom{a-2}{2i-2}}$$

die Summe genommen, bis sie abbricht.

Aufgabe 134. Es ist die mathematische Hoffnung des Banquiers zu bestimmen, wenn er noch a Karten in der Hand hat und der Spieler 2 Karten bezeichnet, auf welche er den Einsatz e macht.

Auflösung. Wie in der vorhergehenden Aufgabe, hat man auch hier nur den Vorteil, den der Bankhalter dem Spieler gegenüber besitzt ins Auge zu fassen.

Dieser Vorteil besteht darin, dass die zwei Karten in irgend einem der $(r-1)$ Abzüge erscheinen, die dem r^{ten} vorangehen da hier $n = 2$ ist, so können

$$a - 2 = 2(r-1)$$

Karten aufgelegt werden, oder es ist

$$r = \frac{1}{2} a$$

zu nehmen, wodurch

$$p = \frac{2.1}{a(a-1)} \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}a} \frac{\binom{a-2}{2i-2}}{\binom{a-2}{2i-2}}$$

$$= \frac{2.1}{a(a-1)} \cdot \frac{1}{2} a$$

$$= \frac{1}{a-1}$$

Dieses ist nicht der ganze Vorteil des Banquiers, denn jetzt kommt noch der Vorteil hinzu, der ihm daraus erwächst, dass die letzte Karte nicht zählt. Sind also die letzten zwei Karten die vom Spieler berechneten, so legt der Banquier eine rechts, die nächste käme links, da sie nicht zählt, so hat der Spieler seinen Einsatz verloren, da seine Karte rechts zu liegen kam.

Die Wahrscheinlichkeit nun, dass die zwei letzten Karten die vom Spieler bezeichneten sind, ist

$$\frac{2.1}{a(a-1)}$$

indem die a Karten $\binom{a}{2}$ Gruppen von 2 bilden können, unter denen nur 1 aus den beiden Karten des Spielers besteht.

Der ganze Vorteil des Banquiers ist also

$$\frac{1}{a-1} + \frac{2}{a\,(a-1)} = \frac{a+2}{a\,(a-1)}$$

und seine Hoffnung mithin, dass er den halben Einsatz einzieht, ist

$$H = \frac{e}{2}\;\frac{a+2}{a\,(a-1)}$$

Er zieht nämlich zufolge des ersten Vorteils den halben Einsatz ein, zufolge des zweiten den ganzen, da aber beides gleichzeitig eintritt, so bringt ihm der zweite Vorteil doch nur den halben Einsatz noch zu dem ersten hinzu.

Aufgabe 135. Der Banquier hält noch a Karten in der Hand, der Spieler setzt auf eine Karte den Einsatz e. Welches ist die mathematische Hoffnung des Banquiers?

Auflösung. Der Vorteil des Banquiers ist hier darin, dass die Karte an letzter Stelle erscheinen kann, wo sie dann ungiltig ist. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$\frac{1}{a}$$

und da der Banquier dann den ganzen Einsatz gewinnt, so ist seine Hoffnung

$$H = \frac{e}{a}.$$

Aufgabe 136. A und B wetten 1 gegen 1 mit zwei Würfeln den Pasch „6 6“ zu werfen und zwar wettet A denselben in 24 Würfen wenigstens einmal zu werfen. Wie gross ist sein Nachteil bei einem Spiel von 24 Würfen?

Auflösung. Nach Aufgabe 82 ist A jedenfalls im Nachteil, da die Wahrscheinlichkeit den Pasch 6 6 in 24 Würfen wenigstens einmal zu werfen kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Es ist die Wahrscheinlichkeit für das Werfen des Pasch

$$p = \frac{1}{36}$$

Die entgegengesetzte

$$q = \frac{35}{36}$$

Daher ist die Wahrscheinlichheit diesen Pasch in 24 Würfen wenigstens einmal zu werfen nach Aufgabe 82:

$$w = 1 - q^{24}$$

$$w = 0{,}49145$$

Nebenrechnung:

$$\log \frac{35}{36} = 0{,}9877655-1$$

$$\log \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}7063720-1$$

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}50855$$

$$w = 1-\left(\frac{35}{35}\right)^{24} = 0{,}49145$$

Steht also der Preis G auf der Wette, so sollte A den Einsatz

$$e = 0{,}49145\ G$$

machen. Da sie aber 1 gegen 1 wetten, so setzt sowohl A als B jeder $\frac{1}{2}$ G ein, daher ist der Nachteil von A:

$$\delta = \frac{1}{2}\ G - 0{,}49145\ G$$

$$\delta = 0{,}00855\ G$$

bei einem Spiele von **24** Würfen. Ebenso gross ist der Vorteil von B.

So klein auch dieser Nachteil von A ist, reicht er doch hin bei einer grossen Anzahl von Partien dem A mit grosser Wahrscheinlichkeit einen grossen Verlust zu bringen, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe 137. Wenn in der vorhergehenden Aufgabe A und B je 0,5 Mark einsetzen, wie viel Partien zu **24** Würfen müssen die Personen spielen, damit man **1** gegen **1** wetten kann, dass der Verlust von A die Summe von **100** Mark übersteigt?

Auflösung. Nach den Auseinandersetzungen der Frage 26 haben wir

$$m > \frac{1}{2\delta^2}\left\{2\ \delta\ C + G^2\rho^2 + G\rho\sqrt{4\delta C + G^2\rho^2}\right\}$$

zu nehmen, wobei sich ρ aus der Gleichung

$$\gamma = \frac{\rho}{\sqrt{2\ w\ (1-w)}}$$

und γ aus

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

berechnet, da $W = \frac{1}{2}$ sein soll, damit man 1 gegen 1 wetten kann, dass der Verlust von A stattfindet. Der Wert von δ ist eben in der vorhergehenden Aufgabe als

$$\delta = 0{,}00855\, G.$$

bestimmt worden. Es ist ferner $C = 100$, $G = 1$; $w = 0{,}49145$.

Daher ergibt sich:

$$m > \frac{1}{2\,.\,(0{,}00855)^2}\left\{0{,}01710.100 + \rho^2 + \rho\sqrt{0{,}0342\,.\,100 + \rho^2}\right\}$$

Aus Tabelle II folgt für $\Theta(\gamma) = \frac{1}{2}$ der Wert $\gamma = 0{,}47$ oder genauer

$$\gamma = 0{,}476936$$

Nebenrechnung:

$$\left.\begin{aligned} \log w &= 0{,}6914793-1 \\ \log w^1 &= 0{,}7063720-1 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \end{aligned}\right\} +$$
$$1{,}6988813-2$$

$$\left.\begin{aligned} \log \sqrt{2\, w w^1} &= 0{,}8494406-1 \\ \log \gamma &= 0{,}6784601-1 \end{aligned}\right\} +$$
$$\log \rho = 0{,}5279007$$
$$\rho = 0{,}3372$$

$$\log 3{,}544 = 0{,}5494937$$

$$\left.\begin{aligned} \log \sqrt{3{,}544} &= 0{,}2747468 \\ \log \rho &= 0{,}5276007-1 \end{aligned}\right\} +$$
$$0{,}8026475-1$$
$$0{,}6348$$

$$\log 0{,}00855 = 0{,}9319661-3$$
$$\log (0{,}00855)^2 = 0{,}8639322-5$$

$$\left.\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{0{,}00855}\right)^2 &= 4{,}1360678 \\ \log 1{,}2294 &= 0{,}0896932 \end{aligned}\right\} +$$
$$4{,}2257610$$
$$16817{,}5$$

daher

$$\rho = 0{,}476936 . \sqrt{2 . 0{,}49145 . 0{,}50855}$$
$$\rho = 0{,}337$$

und

$$\rho^2 = 0{,}114$$

also ist

$$\rho \sqrt{3{,}43 + \rho^2} = \sqrt{3{,}544} . 0{,}337$$
$$= 0{,}6348$$

$$1{,}71 + 0{,}114 + 0{,}6348 = 2{,}4588$$

also

$$m > \frac{2{,}4588}{2 . (0{,}00855)^2}$$
$$m > 16817{,}5$$

d. h. bei **16818** Partien könnte man 1 gegen 1 wetten, dass der Verlust von A mehr als 100 Mark beträgt.

Aufgabe 138. In einer Lotterie werden 100000 Lose ausgegeben und zwar werden folgende Gewinnste festgesetzt:

1 Los gewinnt .	10000	Mark
4 Lose gewinnen à	5000	„
20 „ „ „	1000	„
25 „ „ „	100	„
50 „ „ „	50	„
900 „ „ „	20	„
99000 „ „	den Einsatz,	

wie gross ist dieser, wenn das Spiel ein billiges sein soll?

Auflösung. Der Einsatz muss offenbar gleich der mathematischen Erwartung des Spielers sein und ist daher nach Formel 17 zu berechnen:

$$\begin{aligned} e = \frac{1}{100.000}\, 100.000 + \frac{4}{100.000}\, 5000 \\ + \frac{20}{100.000}\, 1000 + \frac{25}{100.000} . 100 \\ + \frac{50}{100.000}\, 100 + \frac{900}{100.000} . 50 \\ + \frac{99000}{100.000}\, e. \end{aligned}$$

woraus

$$\frac{e}{100} = \frac{73}{100}$$

also

$$e = 73 \text{ Mark}$$

sich ergibt.

Aufgabe 139. Wie gross ist das Risiko, das mit einem Lose verbunden ist?

Auflösung. Da der Spieler nur verliert, wenn eines der Lose zu **50** oder **20** Mark gezogen wird, so ergibt sich sein Risiko nach Formel **20**:

$$R = (73-50)\frac{900}{100000} + (73-50)\frac{50}{100000}$$
$$= 0{,}4885$$

Das Risiko der Lotterieunternehmung berechnet sich nach Formel (20')

$$R' = (10000-73)\frac{1}{100000} + (5000-73)\frac{4}{100000}$$
$$+ (1000-73)\frac{20}{100000} + (100-73)\frac{25}{100000}$$
$$= 0{,}4885$$

wie es sein muss gleich R.

Aufgabe 140. Eine Bank emittiert am 3. Januar 1889 100000 Lose mit folgendem Verlosungsplan: Es werden jährlich am 2. Januar 10000 Lose gezogen und zwar entfällt

auf 1 Los ein Treffer von 10000 Mark
„ 4 Lose je ein Treffer von 5000 „
„ 25 „ „ „ „ „ 2000 „
„ 170 „ „ „ „ „ 1000 „
„ 800 „ „ „ „ „ 500 „

die 9000 übrigen Lose werden zu ihrem Emissionswerte gezogen. Wie hoch stellt sich dieser Emissionswert, wenn als Zinsfuss 3% angenommen wird und die erste Ziehung auf den 2. Januar festgelegt wurde?

Erkl. 48. Bezüglich des Zinsfusses und des Diskontierungsfaktors vergleiche Kleyers Lehrbuch der Zinses-Zins- und Rentenrechnung.

Auflösung. Ist e der Emissionswert, d. h. der Kaufpreis des Loses am 3. Januar 1889, so muss dieser gleich sein der mathematischen Hoffnung des Besitzers eines Loses, die er am 3. Januar 1889 hat. Diese mathematische Erwartung ist die Summe der Erwartungen, die sich an die einzelnen Ziehungen knüpfen, diskontiert auf den 3. Januar 1889. Sind also $e_1, e_2 \ldots . e_{10}$ die mathematischen Erwartungen, die sich an die 1te, 2te .... 10te Ziehung knüpfen, so ist, da die erste Ziehung ein Jahr später erfolgt, der gegenwärtige Wert dieser Erwartungen:

$$e_1\rho,\ e_2\rho^2 \ldots e_{10}\rho^{10}$$

wenn ρ der Diskontierungsfaktor ist, also für unseren Fall

$$\rho = \frac{1}{1{,}03} = 0{,}9708738$$

vorausgesetzt ist.

Dann ist

$$e = e_1\rho + e_2\rho^2 + \ldots + e_{10}\rho^{10}$$

Bestimmung von e_{i+1}. Um e_{i+1} zu bestimmen, müssen wir die Wahrscheinlichkeit w_i bestimmen erstens, dass das Los in den i vorausgehenden Ziehungen nicht gezogen wurde und die mathematische Erwartung ε_{i+1} die sich an die $(i+1)^{te}$ Ziehung knüpft, dann ist

$$e_{i+1} = w_i\varepsilon_{i+1}$$

w_i ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Los weder in der 1ten, noch in der 2ten, noch in der i^{ten} Ziehung gezogen wurde. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Los in der 1ten Ziehung nicht gezogen wird, ist

$$\frac{90000}{100000} = \frac{9}{10}$$

denn 90000 Lose werden nicht gezogen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 90000 Losen, welche bei der 2ten Ziehung vorliegen das Los nicht gezogen wird ist

$$\frac{80000}{90000} = \frac{8}{9}$$

u. s. w. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Los bei der i^{ten} Ziehung, zu welcher noch $(10 - i + 1) . 10000$ Lose vorliegen nicht gezogen wird ist

$$\frac{(10 - i)\,10000}{(10 - i + 1)\,10000} = \frac{10 - i}{10 - i + 1}$$

denn von den $(10 - i + 1) . 10000$ Losen werden $(10 - i)\ 10000$ Lose nicht gezogen.

Es ist also

$$w_i = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{10 - i}{10 - i + 1}$$
$$= \frac{10 - i}{10}$$

Die mathematische Erwartung die sich an das Ziehen des Loses in der $(i + 1)$ Ziehung knüpft ist die Summe der mathematischen Erwartungen der einzelnen Gewinnste. Da nun für die $(i + 1)^{\text{te}}$ Ziehung noch $(10 - i)$, 10000 Lose vorliegen, so ist

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1} = &\frac{1}{(10 - i)\,10000} \cdot 10000 + \frac{4}{(10 - i)\,10000}\,5000 \\ &+ \frac{25}{(10 - i)\,10000} \cdot 2000 + \frac{170}{(10 - i)\,10000}\,1000 \\ &+ \frac{800}{(10 - i)\,10000} \cdot 500 + \frac{9000}{(10 - i)\,10000}\,e \\ = &\frac{1}{10 - i}\,(65 + 0{,}9\,e)\end{aligned}$$

und mithin ist

$$\begin{aligned}e_{i+1} &= w_i\,\varepsilon_{i+1} \\ &= \frac{1}{10}\,(65 + 0{,}9\,e)\end{aligned}$$

oder

$$e_{i+1} = 6{,}5 + 0{,}09\,e$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}e &= (6{,}5 + 0{,}09\,e)\,(\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{10}) \\ &= (6{,}5 + 0{,}09\,e)\,\rho\,\frac{1 - \rho^{10}}{1 - \rho} \\ &= (6{,}5 + 0{,}09\,e) \,.\, 0{,}9709\,\frac{0{,}2559}{0{,}0291} \\ &= (6{,}5 + 0{,}09\,e)\,10{,}75\end{aligned}$$

woraus

$$e = 215 \text{ Mark}$$

folgt.

Anmerkung 89. Man hätte den Wert von e_{i+1} auch so finden können: Die mathematische Hoffnung, die sich an ein Los knüpft ist bei jeder Ziehung dieselbe $65 + 0{,}9\,e$. Da nun das Los in irgend einer der 10 Ziehungen gezogen werden kann, so reduziert sie sich auf $\frac{1}{10}(65 + 0{,}9\,e)$, denn es ist gleiche Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass das Los in irgend einer Ziehung erscheint.

Aufgabe 141. Wie gross ist das Risiko eines Losbesitzers, der dasselbe am 3. Januar 1889 zum Preise von 215 Mark kauft?

Auflösung. Da 215 Mark zu Zinseszins auf 10 Jahre angelegt bei 3 % nicht auf die Höhe von 500 Mark anwachsen, so ist das Risiko des Losbesitzers nur darin vorhanden, dass er die Zinsen seines Geldes verliert, wenn das Los mit dem Emissionswerte gezogen wird.

Wird das Los erst in der $(i+1)^{\text{ten}}$ Ziehung mit dem Emissionswerte e gezogen, so ist dieser Verlust

$$e\,r^{i+1} - e$$

wenn $r = 1{,}03$ der Aufzinsungsfaktor ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Los aber mit dem Emissionswerte in der $(i+1)^{\text{ten}}$ Ziehung gezogen wird ist:

$$\frac{9000}{10000} \cdot \frac{10 - i}{10}$$

nämlich das Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten, dass das Los zu Emissionswerte gezogen wird und der Wahrscheinlichkeit, dass es in den i vorausgehenden Ziehungen nicht gezogen wurde. Das an die $(i+1)^{\text{te}}$ Ziehung sich knüpfende Risiko ist also

$$e\,(r^{i+1} - 1)\,\frac{9}{10} \cdot \frac{10 - i}{10}$$

und mithin das ganze Risiko

$$R = \frac{9 \cdot e}{100} \sum_{0}^{9}{}_i\,(r^{i+1} - 1)(10 - i)$$

oder

$$\frac{R}{0{,}09 \cdot e} = 10 \sum_{0}^{9}{}_i\, r^{i+1} - \sum_{0}^{9}(10 - i) - r \sum_{0}^{9}{}_i\, i\, r^i.$$

$$= 10\,\frac{r^{10} - 1}{r - 1}\,r - 55 - r\,\frac{10\,r^{10}(r-1) - r\,(r^{10} - 1)}{(r-1)^2}$$

wenn man die nebenstehende Erklärung berücksichtigt.

Erkl. 44. Bezüglich des Aufzinsungsfaktor vergleiche Kleyers Lehrbuch über Zinseszins- und Rentenrechnung.

Erkl. 45. Es ist

$$\sum_{0}^{n-1} i\, r^i = \frac{n\,r^n\,(r-1) - r\,(r^n - 1)}{(r-1)^2}$$

Reduziert liefert die Gleichung

$$\frac{R}{0{,}09\,e} = r\,\frac{r\,(r^{10} - 1) - 10\,(r - 1)}{(r-1)^2} - 55$$

Denn setzt man

$$z_i = r^i t^i$$

so ist

$$\frac{d z_i}{d t} = i r^i t^{i-1}$$

und da

$$\sum_0^{n-1} z_i = \frac{1 - r^n t^n}{1 - r t}$$

so ist

$$\sum_0^{n-1} \frac{d z_i}{d t} = \sum_0^{n-1} i r^i t^{i-1} = \frac{n r^n (r t - 1) t^{n-1} - r (r^n t^n - 1)}{(r t - 1)^2}$$

und wenn $t = 1$ gesetzt wird:

$$\sum_0^{n-1} i r^i = \frac{n r^n (r - 1) - r (r^n - 1)}{(r - 1)^2}$$

und für

$$r = 1{,}03$$

also

$$r^{10} = 1{,}3439163$$

eingesetzt liefert dieselbe

$$R = 0{,}09 \times 6{,}93 \times e$$
$$= 0{,}6237 \times e$$

Also beträgt das Risiko 62 % des Emissionspreises, ist mithin

$$R = 0{,}6237 \times 215$$
$$= 134{,}1 \text{ Mark}$$

Aufgabe 142. Eine Person besitzt das Vermögen V, sie will einen Einsatz e auf das Eintreffen eines Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit w machen, auf dessen Eintreffen der Preis v gesetzt ist. Wie gross kann dieser Einsatz sein, damit der moralische Nachteil des Spielers unmerklich ist gegenüber seinem Vermögen?

Auflösung. Dass bei jeder Wette der Spieler einen moralischen Nachteil hat, haben wir bereits in Anmerkung 35 gezeigt. Nach Formel 22 ist der moralische Wert des Gewinnstes des Spielers

$$M = w \log\left(1 + \frac{v - e}{V}\right)$$

Da er aber den Einsatz e macht, so ist der moralische Wert seines Verlustes

$$M' = -w' \log\left(1 - \frac{e}{V}\right)$$

wobei $w' = 1 - w$ ist. Ist die Wette billig, so ist nach Formel (14)

$$e = v \, . \, w$$

oder

$$v - e = \frac{e w'}{w} \ldots$$

und es ist daher der moralische Nachteil:

$$M - M' = w \log\left(1 + \frac{e w'}{V w}\right) + w' \log\left(1 - \frac{e}{V}\right)$$

$$= w \left[\frac{e w'}{V w} - \frac{e^2 w'^2}{2 V^2 w^2} + \ldots\right]$$

$$- w' \left[\frac{e}{V} + \frac{e^2}{2 V^2} + \ldots\ldots\right]$$

Da der Voraussetzung nach $\frac{e}{V}$ sehr klein sein wird, so können die höheren als zweiten Potenzen vernachlässigt werden, und es folgt:

Erkl. 46. Es ist

$$\log(1 + z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \ldots$$

$$\log(1 - z) = -\left[z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \ldots\right]$$

Vergleiche Kleyers Lehrbuch der Integral- und Differentialrechnung.

$$M - M' = -\frac{e^2 w'^2}{2V^2 w} - \frac{e^2 w'}{2V^2}$$
$$= -\frac{e^2 w'}{2V^2 w}$$

Setzt man nun

$$M' - M = \frac{1}{n}$$

wobei n sehr gross ist, so folgt:

$$\frac{1}{n} = \frac{e^2 w'}{2V^2 w}$$

woraus sich

$$e = V\sqrt{\frac{2w}{n(1-w)}}$$

bestimmt.

Aufgabe 143. Ist es moralisch vorteilhaft oder nachteilig eine Summe, die von einem ungewissen Ereignisse abhängt zu versichern?

Erkl. 47. Den Einsatz, welchen man zahlt, damit bei dem Eintreffen des erwarteten Ereignisses die versicherte Summe gezahlt wird, nennt man Prämie. Ist der Einsatz genau gleich der mathematischen Hoffnung des Versichernden, so heisst derselbe Nettoprämie zum Unterschiede von der Bruttoprämie, die der Versichernde wirklich zahlen muss, um die Verwaltungskosten und den Gewinn der Gesellschaft, welche die Versicherung entgegennimmt, zu decken.

Auflösung. Es sei v die Summe, die man erwartet V sei das Vermögen, welches man besitzt, dann ist der moralische Wert der mit der Wahrscheinlichkeit w erwarteten Summe nach Formel 22

$$M = w \log\left(\frac{V+v}{V}\right)$$

Da er nun die Summe $e = vw'$ als Nettoprämie für die Versicherung zahlen soll, so sei z der Zuschlag, welchen die Gesellschaft zu derselben berechnet, also $vw' + z$ die Bruttoprämie, dann ist das Vermögen des Versicherten, nachdem er die Prämie gezahlt hat:

$$V + v - vw' - z = V + vw - z$$

also der moralische Wert dieses Vermögens

$$M_1 = \log\frac{V + vw - z}{V}$$

und soll er keinen moralischen Nachteil haben, so muss

$$M_1 \geqq M$$

d. h.

$$\log\frac{V+v\,w-z}{V} \geqq \log\left(\frac{V+v}{V}\right)^w$$

sein, oder

$$\frac{V+v\,w-z}{V} > \left(\frac{V+v}{V}\right)^w$$

Daher

$$z \leqq V+v\,w - (V+v)^w V^{w'}$$

und da

$$1 + \frac{vw}{V} > \left(1+\frac{v}{V}\right)^w$$

Erkl. 48. Da $w < 1$ ist, so ist

$$1 + x > 1 + xw$$

also

$$\frac{w}{1+x} < \frac{w}{1+xw}$$

daher

$$\int\frac{w\,dx}{1+x} < \int\frac{w\,dx}{1+xw}$$

oder

$$w\log(1+x) < \log(1+xw)$$

d. h.

$$(1+x)^w < 1 + xw$$

Setzt man hierin $x = \frac{v}{V}$, so erhält man die nebenan verwendete Relation.

ist, also auch

$$V + v\,w > (V+v)^w\, V^{w'}$$

so ist z positiv.

Zahlt daher der Versichernde eine Prämie die kleiner als

$$P' = v\,w + V + v\,w - (V+v)^w\, V^{w'}$$

ist, so ist sein moralischer Vorteil grösser, wenn er die Summe versichert. Er ist im moralischen Nachteil, wenn er eine grössere Prämie zahlt als P'.

Schreibt man

$$P' = v\,w\left[1 + \frac{V + w\,v - (V+v)^w\, V^{w'}}{w\,v}\right]$$

so nennt man

$$\alpha = \frac{V + v\,w - (V+v)^w\, V^{w'}}{w\,v}$$

den Zuschlag der Bruttoprämie zur Einheit der Nettoprämie. Dieser Zuschlag α muss also kleiner sein als

$$1 - \frac{(V+v)^w\, V^{w'} - V}{w\,v}$$

oder wenn v im Verhältnis zu V kleiner ist und daher die Glieder mit v^2 vernachlässigt werden können, so dass

$$V\left(1 + \frac{v}{V}\right)^w = V + v\,w - \frac{1}{2}\,\frac{w\,w'\,v}{V} + \ldots\ldots$$

so ergibt sich

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{v\,w'}{V}$$

Aufgabe 144. Ein Haus vom Preise C wird auf ein Jahr gegen Feuer versichert. Wie gross ist die Nettoprämie der Versicherung, wenn w die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Haus innerhalb eines Jahres abbrennt und ρ der Diskontierungsfaktor ist?

Auflösung. Die Nettoprämie muss gleich sein dem gegenwärtigen Werte der mathematischen Hoffnung den Preis C innerhalb des Jahres zu erhalten.

Es frägt sich nur noch welches ist der gegenwärtige Wert der Summe C? Das Haus kann offenbar in irgend einem Zeitraume innerhalb des Jahres abbrennen, also kann die Summe C in irgend einem Zeitintervalle innerhalb des Jahres flüssig werden.

Denkt man sich das Jahr in m Intervalle geteilt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Haus in irgend einem Intervalle abbrennt $\frac{1}{m}$, also ist die mathematische Hoffnung des Preises C für diesen Zeitabschnitt

Erkl. 49. Es ist, wenn man $\frac{1}{m} = \varepsilon$ setzt

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon \rho^{\varepsilon}}{1-\rho^{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{-\varepsilon}{1-\frac{1}{\rho^{\varepsilon}}}$$

oder

$$1-\frac{1}{\rho^{\varepsilon}} = \delta$$

also

$$\varepsilon = \frac{-1}{l\rho}\, l(1-\delta)$$

gesetzt, liefert

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon \rho^{\varepsilon}}{1-\rho^{\varepsilon}} = \lim_{\delta=0} \left[\frac{1}{l\rho} \cdot \frac{l(1-\delta)}{\delta}\right]$$

$$= \frac{1}{l\rho} \lim_{\delta=0} l(1-\delta)^{\frac{1}{\delta}}$$

$$= -\frac{1}{l\rho}\, l \left[\lim_{\delta=0} (1-\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]$$

und da

$$\lim_{\delta=0} (1-\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e^{-1}$$

ist (vgl. Kleyers Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung)
so ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon \rho^{\varepsilon}}{1-\rho^{\varepsilon}} = -\frac{1}{l\rho}$$

Erkl. 50. Man kann auch so schliesen: Ist x die Zeit, welche von Anfang des Jahres verflossen ist, so $C\rho^x$ der Wert der Summe C zu Anfang des Jahres. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe gerade zur Zeit x flüssig wird ist $w\,d\,x$, daher ist die mathematische Hoffnung dieser, zur Zeit x flüssig werdenden Summe $w\,C\rho^x\,d\,x$ mithin ist die mathematische Hoffnung der für das ganze Jahr flüssig werdenden Summen:

$$\int_0^1 w\,C\rho^x\,d\,x = w\,C \int_0^1 \rho^x\,d\,x$$

$\frac{C}{m}$. Diskontiert man alle diese Hoffnungen auf den Anfang des Jahres, so ergibt sich die mathematische Hoffnung zu Anfang des Jahres, wenn das Haus innerhalb desselben abbrennt ist

$$C\frac{1}{m}\left[\rho^{\frac{1}{m}} + \rho^{\frac{2}{m}} + \ldots + \rho^{\frac{m}{m}}\right]$$

$$= C\frac{\rho^{\frac{1}{m}}}{m}\,\frac{1-\rho}{1-\rho^{\frac{1}{m}}}$$

wobei dieses Abbrennen in einen der m Zeiträume fallen muss. Setzt man $m = \infty$, so wird dieser Wert nach nebenstehenden Erklärungen 49 und 50

$$C\,(1-\rho) \lim_{m=\infty} \frac{\frac{1}{m}\rho^{\frac{1}{m}}}{1-\rho^{\frac{1}{m}}} = C\,\frac{1-\rho}{-l\rho},$$

der also der gegenwärtige Wert der Summe C ist, wenn das Haus wirklich abbrennt. Da aber die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Haus abbrennt w ist, so ist der gegenwärtige Wert der mathematischen Hoffnung, also die zu zahlende Nettoprämie:

Formel 24: $$P = w\,C \cdot \frac{1-\rho}{-\log \rho} \quad \ldots\ldots (1)$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bedeutet. Will man statt dessen den Briggschen Logarithmus einführen (siehe Kleyers Lehrb. der Logarithmen), so muss man von der Formel

$$\log y = \log e\,.\,l y$$

Gebrauch machen, in der „log" den Briggschen Logarithmus bedeutet.

Es ist nun

$$\log e = 0{,}43429448$$

und daher erhalten wir die

Formel 25: $$P = \frac{w\,C}{0{,}42428448}\left(\frac{1-\rho}{-\log \rho}\right)$$

Statt des Wertes P aus Formel 25 nimmt man in der Praxis einen angenäherten Wert. Es ist nämlich

$$\log(1-z) = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \ldots\ldots\right)$$

(siehe Kleyers Lehrb. der Differential- und Integralrechnung), also ist

$$-\log \rho = -\log\,[1-(1-\rho)]$$

$$= (1-\rho) + \frac{1}{2}(1-\rho)^2 + \frac{1}{3}(1-\rho)^3 + \ldots$$

$$\frac{-\log \rho}{1-\rho} = 1 + \frac{1}{2}\,(1-\rho) + \frac{1}{3}\,(1-\rho)^2 + \ldots\ldots$$

Setzt man nun

$$\rho^x = z$$
$$x \log \rho = \log z$$
$$d\,x \log \rho = \frac{d\,z}{z}$$

so wird

$$w\,C\int_n^1 \rho^x\,d\,x = w\frac{C}{\log \rho}\int_1^\rho d\,z = w\,C\frac{\rho - 1}{\log \rho}$$

wie oben.

anderseits ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$\rho^{-\frac{1}{2}} = [1-(1-\rho)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(1-\rho) + \frac{1.3}{2.4}(1-\rho)^2 + \;\ldots\ldots$$

also

$$\frac{-\log \rho}{1-\rho} - \rho^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{24}(1-\rho)^2 \;\ldots\ldots\ldots$$

man kann daher, da $1-\rho$ ein sehr kleiner Bruch ist, nahezu

$$\frac{-\log \rho}{1-\rho} = \rho^{-\frac{1}{2}}$$

setzen und erhält dann

Formel 25': $P = w\,C.\rho^{\frac{1}{2}}$ .... (2)

als angenäherten hinreichend guten Wert.

Aufgabe 145. Ein Hausbesitzer versichert sein Haus auf 20 Jahre gegen Feuer, welche Prämie muss er sogleich zahlen, wenn die Versicherungssumme 10000 Mark beträgt, ein Zinsfuss zu 4 % festgesetzt wird und die Wahrscheinlichkeit, dass das Haus innerhalb eines Jahres abbrennt mit 0,002 angenommen ist, und ein 15 % Aufschlag zur Nettoprämie von der Anstalt gemacht wird?

Auflösung. Wir lösen die Aufgabe erst allgemein unter der Voraussetzung, dass das Haus auf n Jahre versichert wird mit dem Werte C bei dem Zinsfuss p, so dass der Diskontierungsfaktor

$$\rho = \frac{100}{100+p}$$

ist, und die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen innerhalb eines Jahres konstant w bleibt. Die Nettoprämie P ist dann die auf den gegenwärtigen Zeitpunkt diskontierte mathematische Erwartung des Preises C.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Haus im ersten Jahre abbrennt ist: w.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Haus im ersten Jahre nicht abbrennt, wohl aber im zweiten ist: $(1-w)\,w$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Haus weder im ersten, noch im zweiten, wohl aber im dritten Jahre abbrennt ist: $(1-w).(1-w)\,w = (1-w)^2\,w$ u. s. w. bis die Wahrscheinlichkeit, dass das Haus in den $(n-1)$ vorausgehenden Jahren nicht abbrennt, im n^{ten} Jahre aber abbrennt sich mit

$$(1-w)^{n-1}\,w$$

ergibt.

Brennt nun das Haus im i^{ten} Jahre ab, so wäre der gegenwärtige Wert der Summe C, wenn das Haus am Anfang des i^{ten} Jahres abbrennen würde $C\rho^{i-1}$, da es aber in einem unbestimmten Zeitraum des i^{ten} Jahres ab-

brennt, so ist der Wert von C auf den Anfang des i^{ten} Jahres vorerst zu diskontieren und das liefert nach Aufgabe 144 den Wert: $C\sigma$, wobei nach Gleichung (1) oder (2)

$$\sigma = \frac{-\log\rho}{1-\rho} \quad \text{oder} \quad \sigma = \rho^{1/2} \text{ ist.}$$

In dieser Weise korrigiert, ist also der gegenwärtige Wert der Summe C, die im Laufe des i^{ten} Jahres flüssig wird

$$C\sigma\rho^{i-1}$$

und da für dieses Flüssigwerden die Wahrscheinlichkeit

$$(1-w)^{i-1}w$$

stattfindet, so ist die mathematische Erwartung, die sich auf das Abbrennen des Hauses im i^{ten} Jahre knüpft auf den gegenwärtigen Zeitpunkt diskontiert:

$$(1-w)^{i-1}w\,.\,C\sigma\rho^{i-1}$$

und mithin die ganze mathematische Erwartung oder die Nettoprämie:

$$P = wC\sigma + (1-w)wC\sigma\rho + \ldots + (1-w)^{n-1}w\,.\,C\sigma\rho^{n-1}$$
$$= wC\sigma[1 + (1-w)\rho + \ldots + (1-w)^{n-1}\rho^{n-1}]$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\log(1-w) &= 0{,}9991305-1 \\
\log\rho &= 0{,}9829674-1 \quad + \\
&\overline{\;0{,}9820979-1\;} \\
(1-w)\rho &= 0{,}9596 \\
\log(1-w)^{20}\rho^{20} &= 0{,}6419580-1 \\
(1-w)^{20}\rho^{20} &= 0{,}4385 \\
\log\rho^{1/2} &= 0{,}9914837-1 \\
\log 20 &= 1{,}3010300 \quad + \\
\log 5615 &= 3{,}7493498 \\
&\overline{\;5{,}0418635\;} \\
\log 404 &= 2{,}6063814 \quad - \\
&\overline{\;2{,}4354821\;} \\
&\;\;272{,}57
\end{aligned}$$

also

Formel 26: $P = C\,.\,w\sigma\dfrac{1-(1-w)^n\rho^n}{1-(1-w)\rho}\ldots(3)$

Da nun in unserer Aufgabe

$$n = 20, \quad w = 0{,}002, \quad \rho = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}9615385$$
$$C = 10000 \text{ Mark}$$

ist, so ergibt sich, wenn $\sigma = \rho^{1/2}$ gesetzt wird:

$$(1-w)\rho = 0{,}9596$$
$$(1-w)^{20}\rho^{20} = 0{,}4385$$

also

$$\frac{1-(1-w)^{20}\rho^{20}}{1-(1-w)\rho} = \frac{0{,}5615}{0{,}0404}$$

oder

$$P = 20\,.\,\rho^{1/2}\,\frac{5615}{404}$$
$$P = 272{,}57 \text{ Mark}$$

Wird noch der 15 % Zuschlag gemacht, so stellt sich die Bruttoprämie auf

$$P' = 272{,}57 + 40{,}89$$
$$= 313{,}46 \text{ Merk}$$

Aufgabe 146. Wie gross ist das Risiko des Versicherten, wenn der Hausbesitzer die Bruttoprämie von 313,46 Mark zahlt, bei der Versicherung in Aufgabe 145?

Auflösung. Da 313,46 Mark zu Zinseszinsen angelegt in 20 Jahren den Betrag von 10000 Mark, welches die Versicherungssumme ist, nicht erreichen, so ist das Risiko für den Versicherten nur darin bestehend, dass er die Prämie von 313,46 Mark verliert, wofür sich die Wahrscheinlichkeit $(1-w)^{20}$ ergibt, indem diess die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass das Haus nicht abbrennt, während der 20 Jahre der Versicherung. Daher ist

$$\begin{aligned} R &= (1-w)^{20} P' \\ &= (0{,}998)^{20} . 313{,}46 \\ &= 0{,}9607 . 313{,}46 \\ &= 301{,}16 \text{ Mark} \end{aligned}$$

oder das Risiko beträgt 96 % der Bruttoprämie.

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \log 0{,}998 &= 0{,}9991305 - 1 \\ \log (0{,}998)^{20} &= 0{,}9826100 - 1 \\ \log 313{,}46 &= 2{,}4961821 \\ & \quad 2{,}4787921 \\ & \quad 301{,}16 \end{aligned}$$

Aufgabe 147. Wie gross ist das Risiko der Versicherungsanstalt, wenn sie die Bruttoprämie von 313,46 Mark einhebt.

Auflösung. Würde die Nettoprämie von der Anstalt behoben, dann wäre das Risiko des Versicherten ebenso gross, wie das Risiko der Anstalt, denn die Nettoprämie stellt die mathematische Erwartung des Versicherten und der Anstalt dar. Ist also P die Nettoprämie, so wäre $(1-w)^{20} P$ das Risiko des Versicherten und der Anstalt. Hebt die Anstalt aber die Bruttoprämie P' ein, so ist ihr eventueller Verlust in dem 1ten, $2^{\text{ten}} \ldots n^{\text{ten}}$ Jahr auf den Anfang der Versicherung diskontiert:

$$C\sigma - P', \quad C\sigma\rho - P' \ldots, \quad C\sigma\rho^{n-1} - P'$$

und die Wahrscheinlichkeiten dieser Verluste sind die für das Abbrennen des Hauses im 1ten, $2^{\text{ten}} \ldots n^{\text{ten}}$ Jahre, also $w\,(1-w)\,w \ldots (1-w)^{n-1} w$, also ist das Risiko der Anstalt:

$$\begin{aligned} R' &= (C\sigma - P')\,w + (C\sigma\rho - P')(1-w)\,w + \ldots \\ &\qquad + (C\sigma\rho^{n-1} - P')(1-w)^{n-1} w \\ &= C\sigma w\,[1 + (1-w)\,\rho + \ldots (1-w)^{n-1}\rho^{n-1} \\ &\qquad - P' w\,[1 + (1-w) + \ldots + (1-w)^{n-1}] \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (3)

$$R' = P - P'[1 - (1-w)^n]$$

Ist

$$z = P' - P$$

der Zuschlag zur Nettoprämie, so folgt

$$R' = P'(1-w)^n - z$$

d. h. das Risiko der Anstalt ist um den Zuschlag zur Nettoprämie geringer als das Risiko des Versicherten, ein Resultat, das auch vornherein klar ist, da der Zuschlag jedenfalls der Anstalt verbleibt, also ihr Risiko mit Gewissheit verringert.

Für unseren Fall wird also das Risiko der Anstalt blos

$$R' = 301{,}16 - 40{,}89$$
$$= 260{,}27 \text{ Mark}$$

Aufgabe 148. Wie hoch stellt sich die Prämie, wenn ein Haus mit 5000 Mark für immer gegen Brand versichert sein soll und die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen innerhalb eines Jahres mit 0,004 angenommen wird?

Auflösung. Dieselbe Überlegung wie in Aufgabe 145 liefert als Prämie für die Versicherung des Hauses vom Preise C auf n Jahre:

$$P = C\rho^{1/2} w \frac{1-(1-w)^n \rho^n}{1-(1-w)\rho}$$

Setzt man hierin $n = \infty$, so wird, da $(1-w) < 1$ und $\rho < 1$, also auch $(1-w)\rho < 1$ ist:

$$\lim_{n=\infty} (1-w)^n \rho^n = 0$$

und daher ist

Formel 27: $$P = C\rho^{1/2} \frac{w}{1-(1-w)\rho} \quad \ldots \text{(4)}$$

die Prämie für eine immerwährende Versicherung.

Setzt man

$$C = 5000 \text{ Mark} \qquad w = 0{,}004$$
$$\rho = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}9615385$$

so ergibt sich

$$1-(1-w)\rho = 0{,}0423076$$

und mithin

$$P = 5000 \cdot \rho^{1/2} \frac{0{,}004}{0{,}0423076}$$
$$= 463{,}62 \text{ Mark}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \log 5000 &= 3{,}6989700 \\ \log \rho^{1/2} &= 0{,}9914833 - 1 \\ \log 0{,}004 &= 0{,}6020600 - 3 \quad + \\ \hline & 1{,}2925133 \\ \log 0{,}0423076 &= 0{,}6263481 - 2 \quad - \\ \hline \log P &= 2{,}6661652 \\ & 463{,}62 \end{aligned}$$

Aufgabe 149. Wie berechnet man das Risiko bei einer immerwährend dauernden Versicherung gegen Brand?

Auflösung. Nach Aufgabe 148 ist die Prämie für eine immerwährende Versicherung:

$$P = C\rho^{1/2} \frac{w}{1-(1-w)\rho} \quad \ldots\ldots \text{(4)}$$

Die Anstalt zahlt nun den Preis C bei dem Abbrennen, hat also bei dem Abbrennen im 1ten, $2^{\text{ten}} \ldots n^{\text{ten}}$ Jahre die Verluste:

$$C\sigma - P, \quad C\sigma\rho - P\ldots, \quad C\sigma\rho^{n-1} - P$$

zu erwarten, so lange

$$C\sigma\rho^{n-1} > P$$

ist, sowie

$$C\sigma\rho^{n-1} \leqq P$$

wird sind für die Anstalt keine Verluste mehr vorhanden, ihr Risiko besteht daher nur in der Summe:

$$R = \sum_{i=o}^{i=n} (C\sigma\rho^{i-1} - P)(1-w)^{i-1} w$$

wobei sich n aus

$$C\sigma\rho^{n-1} \leqq P$$

bestimmt.

Dies liefert für $\sigma = \rho^{1/2}$ gesetzt

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \log\rho + \log C \leqq \log P$$

oder

$$n \leqq \frac{1}{2} + \frac{\log C - \log P}{-\log\rho}$$

Da aus Gleichung (4)

$$\log C - \log P = -\frac{1}{2}\log\rho - \log w + \log(1 - \rho + w\rho)$$

folgt, so ergibt sich

$$n \leqq 1 + \frac{\log(1-\rho+w\rho) - \log w}{-\log\rho}$$

Wir haben daher: Das Risiko der Versicherungsanstalt und daher auch des Versicherten bei einer immerwährenden Versicherung gegen Brand ist

$$R = w \sum_{i=1}^{i=n-1} (C\rho^{i-1/2} - P)(1-w)^{i-1}$$

$$= w\left[\sum_{i=1}^{i=n-1} C\rho^{1/2}(1-w)^{i-1}\rho^{i-1} - \sum_{i=1}^{i=n-1} P(1-w)^{i-1}\right]$$

$$= w\left[C\rho^{1/2}\frac{1-(1-w)^n\rho^n}{1-(1-w)\rho} - P\frac{1-(1-w)^n}{1-(1-w)}\right]$$

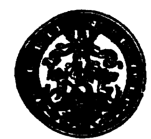
$$\left.\begin{aligned}
R &= C\rho^{1/2} w \frac{1-(1-w)^n\rho^n}{1-(1-w)\rho} - P[1-(1-w)^n] \\
&\text{und mit Rücksicht auf die Gleichung (4):} \\
R &= P[1-(1-w)^n\rho^n] - P[1-(1-w)^n] \\
&\text{also} \\
R &= P(1-w)^n(1-\rho^n) \\
&\text{wobei} \\
n &\leqq 1 + \frac{\log(1-\rho+w\rho) - \log w}{-\log\rho}
\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

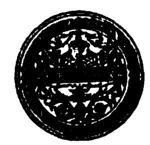
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

830. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung
Dritter Teil.
Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.
Forts. v. Heft 823. — Seite 161—176.
Mit 1 Figur.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.**
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 823. — Seite 161—176. Mit 1 Figur.

Inhalt:

Stuttgart 1890.
Verlag von Julius Maier.

zu nehmen ist, in dem Sinne, dass n die grösste in dem Ausdrucke rechts enthaltene ganze Zahl ist.

Aufgabe 150. Wie gross ist das mit der Versicherung in Aufgabe 148 verbundene Risiko?

Auflösung. Wir haben vor allem nach Aufgabe 149 Gleichung 5 den Wert von n zu bestimmen. Es ist, nach der Nebenrechnung zu Aufgabe 148:

$$\begin{array}{rll} -\log w = & -0{,}6020600 + 3 & \\ \log(1-\rho+w\rho) = & 0{,}6263481 - 2 & \Big\} + \\ \hline & 1{,}0242881 & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rl} +\log\rho = & 0{,}9829667 - 1 \\ -\log\rho = & 0{,}0210333 \end{array}$$

also

$$n \leqq 1 + \frac{10242881}{210333}$$

$$n \leqq 1 + 48{,}69$$

also hat man $n = 49$ zu nehmen, so dass

$$\begin{aligned} R &= 463{,}62\,.\,(0{,}996)^{49}\,(1-\rho^{49}) \\ &= 463{,}62\,.\,(0{,}996)^{49}.\,0{,}853659 \\ &= 463{,}62\,.\,0{,}70144 \\ &= 325{,}14 \text{ Mark} \end{aligned}$$

ist, oder das Risiko beträgt 70 % der Nettoprämie.

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{rll} \log 10242881 = & 7{,}0103805 & \\ \log 210333 = & 5{,}3229074 & \Big\} - \\ \hline & 1{,}6874731 & \\ & 48{,}69 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \log 0{,}996 = & 0{,}9982593 - 1 & \\ \log(0{,}996)^{49} = & 0{,}9147057 - 1 & \\ \log 0{,}853659 = & 0{,}9312844 - 1 & \Big\} + \\ \hline & 0{,}8459901 - 1 & \\ \log 463{,}62 = & 2{,}6661528 & \Big\} + \\ \hline & 2{,}5121429 & \\ & 325{,}14 & \end{array}$$

Aufgabe 151. Ein Haus wird gegen jährliche Prämienzahlung versichert. Wie gross ist die jährliche im Vorhinein zu zahlende Nettoprämie, wenn die Versicherung n Jahre dauern soll, der Preis des Hauses mit C, die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen mit w angenommen wird?

Auflösung. Nach Formel 26 ist die am Anfang der Versicherung einmal zu zahlende Prämie

$$P = C\rho^{1/2}w\,\frac{1-(1-w)^n\rho^n}{1-(1-w)\rho}$$

Soll diese Summe P durch jährliche Einzahlungen p geleistet werden, so muss P der gegenwärtige Wert aller der in den einzelnen Jahren zu zahlenden Teilzahlungen sein, d. h. es muss

$$\begin{aligned} P &= p + p\rho + p\rho^2 + \ldots + p\rho^{n-1} \\ &= p\,\frac{1-\rho^n}{1-\rho} \end{aligned}$$

sein, woraus

$$p = P\,\frac{1-\rho}{1-\rho^n}$$

und daher ist die jährlich im Vorhinein zu zahlende Prämie

Formel 28: $$p = Cw\rho^{1/2}\,\frac{1-(1-w)^n\rho^n}{1-(1-w)\rho}\,.\,\frac{1-\rho}{1-\rho^n}$$

Erkl. 51. Es ist P der gegenwärtige Wert einer Rente vom Werte p, die n Jahre lauft. Vergleiche Kleyers Lehrbuch über Zinseszins- und Rentenrechnung.

Aufgabe 152. Es ist zu zeigen, ob es vorteilhafter ist, eine Versicherung auf n Jahre einzugehen und die jährliche Prämie p nach Formel 28 zu zahlen oder jährlich eine besondere Versicherung einzugehen und die Prämie P nach Formel 25 zu zahlen.

Auflösung. Die erste Versicherungsart wird für den Versicherten so lange von Vorteil sein, so lange

$$P > p$$

so lange also

$$P - p > o$$

ist. Da nun

$$P = C w \rho^{1/2}$$

$$p = C w \rho^{1/2} \frac{[1-(1-w)^n \rho^n][1-\rho]}{[1-(1-w)\rho][1-\rho^n]}$$

ist, so folgt, wenn $1 - w = w'$ für den Augenblick gesetzt wird, dass

$$P - p = C w \rho^{1/2} \frac{(1-w'\rho)(1-\rho^n)-(1-w'^n\rho^n)(1-\rho)}{(1-w'\rho)(1-\rho^n)}$$

ist und dass daher

$$P - p > o$$

ist, so lange

$$(1-w'\rho)(1-\rho^n) > (1-w'^n\rho^n)(1-\rho)$$

oder

$$w > \rho^{n-1}(1-w'^n) - \rho^n(1-w'^{n-1})w'$$

ist. Setzt man

$$f(n) = \rho^{n-1}(1-w'^n) - \rho^n(1-w'^{n-1})w'$$

so ist

$$f(n+1) = \rho^n(1-w'^{n+1}) - \rho^{n+1}(1-w'^n)w'$$

und

$$f(n) - f(n+1) = \rho^{n-1}(1-\rho)(1-\rho w')(1-w'^n)$$

d. h. es ist

$$f(n) > f(n+1)$$

nachdem $\rho < 1$ und $w' < 1$ ist.

Da nun

$$f(1) = w$$

ist, so wird für jedes n:

$$w > f(n)$$

mit auch stets

$$P > p$$

und nur für $n = 1$ wird, wie es sein muss $P = p$.

Es ist daher stets vorteilhafter eine Versicherung auf n Jahre einzugehen, als jährlich eine neue Versicherung einzugehen.

Aufgabe 153. Ein Haus wird gegen jährliche Prämienzahlung auf 15000 Mark auf 30 Jahre gegen Feuer versichert, wie gross ist der Unterschied gegen die Versicherung

auf ein Jahr, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen mit 0,0012 und der Zinsfuss mit 4 %₀ angenommen wird?

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\log \rho &= 0{,}9829667 - 1 \\
\log (1 - w) &= 0{,}9994785 - 1 \quad + \\
\hline
\log \rho (1 - w) &= 0{,}9824452 - 1 \\
\rho (1 - w) &= 0{,}960385 \\
\log \rho^{30} (1 - w)^{30} &= 0{,}4733560 - 1 \\
\rho^{30} (1 - w)^{30} &= 0{,}2974103 \\
\log \rho^{30} &= 0{,}4890010 \\
\rho^{30} &= 0{,}3083195
\end{aligned}$$

Auflösung. Zur Berechnung der jährlich zu zahlenden Prämie p bedienen wir uns der Formel 28

$$p = C w \rho^{1/2} \frac{1 - (1 - w^n)\rho^n}{1 - (1 - w)\rho} \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^n}$$

wobei

$$C = 15000, \quad n = 30, \quad w = 0{,}0012$$

$$\rho = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}9615385$$

zu setzen ist.

Es ist

$$\begin{aligned}
\rho^{30} (1 - w)^{30} &= (0{,}9988)^{30} (0{,}9615385)^{30} \\
&= 0{,}2974103 \\
1 - (1 - w)^{30} \rho^{30} &= 0{,}7025897 \\
1 - (1 - w) \rho &= 0{,}039615 \\
1 - \rho &= 0{,}0384615 \\
1 - \rho^{30} &= 0{,}7916805
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log C &= 4{,}1760913 \\
\log w &= 0{,}0791812 - 3 \\
\log \rho^{1/2} &= 0{,}9914833 - 1 \quad + \\
\log [1 - (1 - w)^{30} \rho^{30}] &= 0{,}8467020 - 1 \\
\log (1 - \rho) &= 0{,}5850263 - 2 \\
\hline
&\ 0{,}6784741 - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log [1 - (1 - w) \rho] &= 0{,}5978597 - 2 \\
\log (1 - \rho^{30}) &= 0{,}8985500 - 1 \quad + \\
\hline
&\ 0{,}4964097 - 2 \\
\hline
\log p &= 1{,}1820644 \\
p &= 15{,}207 \text{ Mark}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Prämie für eine einjährige Versicherung verwenden wir die Formel (25)

$$P = w C \rho^{1/2}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
\log C &= 4{,}1760913 \\
\log w &= 0{,}0791812 - 3 \quad + \\
\log \rho^{1/2} &= 0{,}9914833 - 1 \\
\hline
\log P &= 1{,}2467558 \\
P &= 17{,}65 \text{ Mark}
\end{aligned}$$

So dass bei einer Versicherung auf 30 Jahre jährlich um

$$P - p = 2{,}44$$

weniger gezahlt werden muss, als wenn die Versicherung jährlich erneuert wird.

Aufgabe 154. Man berechne die jährlich zu zahlende Prämie, damit ein Haus auf immer gegen Brand versichert ist.

Auflösung. Diese jährliche Prämie ergibt sich aus der Formel 28, wenn in derselben $n = \infty$ gesetzt wird, als die

Formel 29: $$p = C w \rho^{1/2} \frac{1 - \rho}{1 - (1 - w) \rho}$$

Da für die jährlich zu erneuernde Versicherung

$$P = C w \rho^{1/2}$$

ist, so folgt

$$P - p = C w \rho^{1/2} \frac{\rho w}{1-(1-w)\rho}$$

also

$$P = p + C \frac{w^2 \rho^{3/2}}{1-(1-w)\rho}$$

d. h. es ist P stets grösser als p.

Die Formel 29 zeigt auch, dass wenn

$$P_1 = C \frac{w \rho^{1/2}}{1-(1-w)\rho}$$

gesetzt wird, wobei P_1 die einmal zu zahlende Prämie nach Formel 27 ist, dass dann

$$p = P_1 (1-\rho)$$

ist.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 155. Eine Urne enthält 7 weisse, 13 schwarze Kugeln. Man macht m Züge und soll m so bestimmen, dass m' weisse Kugeln gezogen werden, so dass die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass

$$\frac{7}{20}\, m + \frac{m}{100} > m' > \frac{7}{20}\, m - \frac{m}{100}$$

den Wert

$$W = \frac{10000}{10001}$$

hat.

Andeutung. Man löst die Aufgabe einmal nach Formel 12, das anderemal nach Formel 13 auf, wie es in den Aufgaben 121 und 122 geschehen ist.

Aufgabe 156. Man wirft mit zwei Würfeln und frägt nach der Anzahl m von Würfen, in welchen die Wahrscheinlichkeit $W = \frac{1}{2}$ wird, dass wenigstens $\left(\frac{m}{6} - \frac{m}{50}\right)$ mal und höchstens $\left(\frac{m}{6} + \frac{m}{50}\right)$ mal irgend ein Pasch erscheint?

Andeutung. Die Lösung soll mittels der Formel 13 geschehen.

Aufgabe 157. Wie gross wird m, wenn man in Aufgabe 156 den bestimmten Pasch „6 6" erwartet und die Abweichung auch $\pm \frac{m}{50}$ vom wahrscheinlichsten Werte $\frac{m}{36}$ sein soll.

Aufgabe 158. Das Verhältnis der Knaben- zu den Mädchengeburten sei mit 18 : 17 angenommen. Bei wie viel Geburten m wird die Anzahl Knabengeburten m' der Bedingung

$$\frac{18}{35}\, m + 900 > m' > \frac{18}{35}\, m - 900$$

genügen und hiefür sich die Wahrscheinlichkeit

$$W = 0{,}9999$$

ergeben?

Andeutung. Aus Formel 13 ist m zu berechnen, wenn $r = 900$, $p = \frac{18}{35}$ $q = \frac{17}{35}$ und $W = 0{,}9999$ ist.

Aufgabe 159. Das Verhältnis der Knabengeburten zu den Mädchengeburten wird 106 : 100 angenommen. Wie gross ist die Abweichung r von diesem Verhältnisse bei 94500 Geburten, wenn die Wahrscheinlichkeit

$$W = 0{,}999$$

sein soll?

Aufgabe 160. Wie viel Würfe muss man mit 3 Würfeln machen, damit die Wahrscheinlichkeit irgend einen Pasch zu werfen zwischen $\frac{1}{36} + \frac{1}{360}$ und $\frac{1}{36} - \frac{1}{360}$ liegt?

Aufgabe 161. Welches ist die mathematische Erwartung eines Spielers, der auf das Erscheinen eines bestimmten Quaterno resp. Quinterno in der Lotterie setzt, wenn ein Quaterno mit dem $4 \times 4800 = 19200$ fachen Einsatz ein Quinterno mit dem 48000 fachen Einsatz gezogen wird?

Andeutung. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten für ein Quaterno resp. Quinterno und benütze dann Formel 14.

Aufgabe 162. Zwei Personen A und B spielen Würfel. A erhält von B die Summe G, wenn die „6“ fällt, wie gross ist der Einsatz von A und wie gross ist das Risiko des Spielers?

Aufgabe 163. Aus einer Urne, in der die Nummern 1 bis 90 liegen, werden drei Nummern gezogen. Im Falle die Summe derselben unter 101 ist, erhält man als Preis G Mark, wie gross muss der Einsatz sein, wenn das Spiel billig sein soll?

Andeutung. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis ist nach Aufgabe 14 gegeben. Den Einsatz berechnet man nach Formel 14.

Aufgabe 164. Wie gross ist das Risiko des Spielers bei 10 Spielen der Aufgabe 163?

Aufgabe 165. Eine Urne enthält 7 weisse, 9 rote und 11 schwarze Kugeln. *A* erhält, im Falle er eine weisse Kugel zieht, 1 Mark, im Falle er eine rote zieht, 2 Mark und im Falle er eine schwarze zieht, 3 Mark. Wie gross muss sein Einsatz sein, wenn das Spiel billig ist?

Andeutung. Ist nach dem Vorgange der Aufgabe 128 zu lösen.

Aufgabe 166. Wie gross ist das Risiko von *A* in der obigen Aufgabe?

Aufgabe 167. Eine Urne enthält 20 Kugeln, *A* erhält 2 Mark, wenn er eine gerade Anzahl derselben herauszieht. Wie gross muss sein Einsatz sein, damit das Spiel billig ist?

Andeutung. Die Wahrscheinlichkeit eine gerade Anzahl Kugeln zu ziehen, bestimmt sich nach Aufgabe 18.

Aufgabe 168. Wie gross ist das Risiko von *A* bei dem Spiele?

Aufgabe 169. Wie gross muss der Einsatz jeder von zwei Personen sein, die das Spiel passe-dix spielen?

Passe-dix ist das Spiel, mit Würfeln die Summe über 10 zu werfen.

Andeutung. Vergl. Aufgabe 10.

Aufgabe 170. Zwei Personen *A* und *B* spielen mit zwei Würfeln. *B* macht sich anheischig dem *A* soviel Mark zu zahlen als die Summe der Punkte beträgt, die *A* aufwirft. Wie gross muss der Einsatz von *A* in diesem Spiele sein, damit es billig ist?

Andeutung. Die Lösung geschieht analog der Aufgabe 128.

Aufgabe 171. Wie gross ist das Risiko von *A* in dem Spiele der vorhergehenden Aufgabe?

Aufgabe 172. Eine Urne enthält 15 weisse, 45 schwarze Kugeln. *A* erhält 9 Mark, wenn er eine weisse Kugel zieht. Wie viel Mark muss er zahlen, wenn er eine schwarze Kugel zieht, damit das Spiel billig ist?

Aufgabe 173. Zwei Personen spielen mit zwei Würfeln. Der Gewinnst beträgt 12 Mark, den derjenige erhält, der zuerst 10 Pasch wirft. Nachdem *A* schon 6 Pasch und *B* ihrer 4 geworfen hat, kommen sie überein, das Spiel abzubrechen. Wie viel erhält *A*, wie viel *B* von dem Einsatz?

Andeutung. Die Lösung geschieht wie in Aufgabe 132.

Aufgabe 174. Es werden 500 Lose emittiert, von diesen gewinnt

1 Los den Preis von 1000 Mark
4 Lose die Preise zu 500 „
10 „ „ „ „ 100 „
100 „ „ „ „ den Einsatz. Wie hoch stellt sich der Preis eines Loses?

Andeutung. Die Lösung geschieht wie in Aufgabe 138.

Aufgabe 175. Welches Risiko hat der Loskäufer?

Aufgabe 176. Es werden 60000 Lose emittiert mit dem folgenden Verlosungsplan: Jährlich werden 1000 Lose gezogen, von denen

1 Los den Preis von 5000 Mark
4 Lose den Preis zu 1000 „
15 „ „ „ „ 500 „
80 „ „ „ „ 200 „
900 „ „ „ „ 100 „
gewinnen. Wie teuer muss ein Los sein, wenn das Spiel ein billiges ist und ein Zinsfuss zu 4 % angenommen wird?

Andeutung. Die Lösung geschieht wie in Aufgabe 140.

Aufgabe 177. Wie gross ist das Risiko, das mit einem Lose verbunden ist?

Aufgabe 178. Wie hoch stellt sich das Risiko des Spieles in der vorhergehenden Aufgabe?

Aufgabe 179. Im Pharaospiele hat der Banquier bereits 20 Abzüge gemacht und ein Spieler setzt auf Ass, Dame, Bube den Preis von 100 Mark. Welches ist die mathematische Hoffnung des Gewinnstes des Banquier?

Andeutung. Vergleiche die allgemeine Lösung in der Aufgabe 133.

Aufgabe 180. Der Banquier hält im Pharospiele noch 10 Karten in der Hand, ein Spieler setzt auf König und Dame den Preis von 500 Mark, welches ist die mathematische Gewinnsthoffnung des Banquier?

Aufgabe 181. Nachdem der erste Abzug geschehen ist, setzt der Spieler 1000 Mark auf ein Ass, welches ist die mathematische Gewinnsthoffnung des Banquier?

Aufgabe 182. Eine Person besitzt 10000 Mark und will auf den Gewinn einer Summe, die von der Wahrscheinlichkeit $w = 0{,}05$ abhängt, einen Einsatz machen, der für sein Vermögen einen möglichst kleinen moralischen Nachteil, etwa $\frac{1}{10000}$ bildet. Wie gross kann sein Einsatz sein? und wie gross der zu erwartende Gewinn?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 142.

Aufgabe 183. Ein Rheder hat ein Schiff, das den Wert von 250000 Mark repräsentiert, gegen Havarie versichert. Wie gross kann der Zuschlag zu der Nettoprämie sein, damit er keinen moralischen Nachteil von der Versicherung hat, wenn sein sonstiges Vermögen 10000 Mark beträgt und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Schiff strandet, mit 0,019 angenommen wird?

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 143.

Aufgabe 184. Wie gross kann der Zuschlag sein in der vorhergehenden Aufgabe, wenn der Rheder bloss das Vermögen von 100 Mark nebstbei besitzt.

Aufgabe 185. Ein Kaufmann versichert sein Warenlager gegen Brand auf 10 Jahre. Wie gross ist die Nettoprämie, wenn der Wert des Warenlagers mit 500000 Mark angesetzt wurde und die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen in einem Jahr mit 0,0056 angenommen wird? Der Zinsfuss ist $3\frac{1}{2}\%$.

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 145 Formel 26.

Aufgabe 186. Wie gross ist das Risiko des Versicherten bei der vorhergehenden Aufgabe, wenn die Anstalt, bei welcher die Versicherung geschah, einen 20% Aufschlag zur Nettoprämie erhebt?

Aufgabe 187. Wie gross ist das Risiko der Versicherungsanstalt bei den Bedingungen der Aufgaben 185 und 186?

Aufgabe 188. Ein Hausbesitzer versichert sein Haus im Werte von 4800 Mark auf 15 Jahre gegen Abbrennen und will eine jährliche Prämie zu Beginn jedes Jahres zahlen. Wie gross ist diese Prämie, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen mit 0,0053 angenommen wird und ein Zinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$ der Rechnung zu Grunde gelegt wird?

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 151 Formel 28.

Aufgabe 189. Ein Kirchengebäude soll durch eine einmalige Einzahlung gegen Abbrennen auf ewige Zeiten versichert werden. Wie gross ist die zu zahlende Prämie, wenn der versicherte Wert 150000 Mark beträgt und die Wahrscheinlichkeit des Abbrennens mit 0,0003 angenommen wird? Der Zinsfuss ist $3\frac{1}{2}\%$.

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 148 Formel 27.

Aufgabe 190. Ein Haus wird mit 5000 Mark auf 40 Jahre versichert, wie gross ist die jährlich zu zahlende Prämie, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen mit 0,0005 angenommen wird und der Zinsfuss zu 3 % festgesetzt ist?

Aufgabe 191. Wie gross ist der Unterschied der in Aufgabe 190 zu zahlenden jährlichen Prämie gegen eine Prämie für ein Jahr?

Aufgabe 192. Wie gross ist die jährlich zu zahlende Prämie für eine auf ewige Zeiten gegen Feuer versicherte Gemäldegalerie im Werte von 5000000 Mark, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen mit 0,00003 angenommen wird und der Zinsfuss mit 35 % festgesetzt ist?

Aufgabe 193. Jemand erlegt bei einer Anstalt 272,57 Mark als Nettoprämie für eine Feuerversicherung seines Hauses im Werte von 10000 Mark. Wie lange dauert die Versicherung, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen innerhalb eines Jahres mit 0,002 angenommen wird und der Zinsfuss mit 4 % festgestellt ist?

Andeutung. Man hat die Formel 26 zu benützen, in der n in Frage steht. Es ergibt sich

$$n = \frac{\log \left[1 - \frac{P\,(1-(1-w)\,\rho)}{C\,w\,\rho^{\frac{1}{2}}}\right]}{\log\,(1-w) + \log\,\rho}$$

III. Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori.

Aufgaben über Zeugenaussagen.

A. Wahrscheinlichkeit einer Ursache.

Frage 36. Was versteht man unter Wahrscheinlichkeit a posteriori?

Antwort. Unter Wahrscheinlichkeit a posteriori versteht man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, die aus dem Eintreffen desselben berechnet wurde.

Ist nämlich ein Ereignis von verschiedenen Ursachen abhängig, die seinen Eintritt teils begünstigen, teils hindern, so wird es in einer Reihe von Versuchen eine gewisse Anzahl-mal beobachtet werden und hieraus lässt sich, wie wir sehen werden, ein Schluss auf die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ziehen, die demselben während der Versuche zukam.

Erkl. 52. Zum Unterschiede von dieser Wahrscheinlichkeit a posteriori, nennt man die Wahrscheinlichkeit, die dem Ereignisse zukommt, bevor es noch eingetreten ist, Wahrscheinlichkeit a priori, diese allein haben wir bis jetzt betrachtet.

Frage 37. Was versteht man unter den Ursachen eines Ereignisses?

Antwort. Unter den Ursachen eines Ereignisses versteht man die Gesamtheit der Umstände, welche bei dem Entstehen des Ereignisses wirkten. Ein Ereignis kann von einer oder mehreren Ursachen abhängen.

So ist das Werfen des Würfels die Ursache des Aufwerfens irgend einer seiner Seiten. Die Gravitation ist die Ursache der Planetenbewegung u. s. w.

Frage 38. Wie teilt man die Ursachen ein?

Antwort. Die Ursachen werden in solche eingeteilt, welche man der Grösse ihrer Wirkung nach berechnen oder wenigstens abschätzen kann, und solche, welche vollständig ihrer Grösse nach unbekannt, sich stetig ändernd aller Werte fähig sind, und die Zufälle genannt werden. So sind die Ursachen einer jeden Naturerscheinung, so einfach dieselbe auch sein mag uns vollständig in ihrer Grösse unbekannt und wir können auf dieselben nur aus den Erscheinungen, die sie hervorbringen, schliessen.

Frage 39. Was versteht man unter einer Hypothese in der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Antwort. Unter einer Hypothese versteht man die Annahme irgend eines Wertes für den unbekannten Zufall.

Ist z. B. die Wahrscheinlichkeit w eines zusammengesetzten Ereignisses ausgedrückt durch die Formel $w = f(x)$, wobei x die a priori unbekannte Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses ist und ich setzte $x = a$, so wird $f(a)$ der Wert der Wahrscheinlichkeit unter der Hypothese, dass $x = a$ ist.

Frage 40. Was versteht man unter der wahrscheinlichsten Hypothese.

Antwort. Unter der wahrscheinlichsten Hypothese versteht man diejenige, welche der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses den grössten Wert erteilt.

Ist also $w = f(x)$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, so ist diejenige Hypothese $x = x_0$ die wahrscheinlichste, für welche $f(x_0)$ ein Maximum wird.

Frage 41. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass eine von mehreren Ursachen wirkte, nachdem das Ereignis eingetreten ist, wenn die Wahrscheinlichkeiten bekannt sind, die die Ursachen dem Ereignisse erteilen, wenn sie einzeln wirken würden?

Antwort. Die Berechnung geschieht nach dem Theorem von Bayes in folgender Weise. Seien $U_1, U_2 \ldots U_n$ die Ursachen, welche wirken können, damit überhaupt das Ereignis eintritt. Es möge dann p_1 die Wahrscheinlichkeit

Erkl. 53. Bayes, der das nebenstehende Theorem zuerst aufstellte und bewies, war ein englischer Mathematiker, des 18. Jahrhunderts. Den Beweis teilte er in den Phil. Transaction vom Jahre 1763 pag 370 mit.

des Ereignisses sein, wenn U_1 allein als seine Ursache wirkt, p_2 die Wahrscheinlichkeit, wenn U_2 u. s. w. p_n die Wahrscheinlichkeit, wenn U_n allein wirkt. Ist nun das Ereignis wirklich eingetreten, so hat irgend eine Ursache U_1 oder U_2 ... U_n gewirkt, wobei vorausgesetzt ist, dass jede derselben gleich wahrscheinlich zur Wirkung gelangt, dann ist die Wahrscheinlichkeit w_i, dass gerade die Ursache U_i wirkte, gegeben durch die

Formel 30: .. $w_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$

Frage 42. Wie beweist man den Satz von Bayes?

Antwort. Der Beweis des Satzes von Bayes kann so geführt werden:

Wir betrachten das Ereignis als das Ziehen einer weissen Kugel aus einer Reihe von Urnen U_1, U_2 ... U_n, von denen jede weisse und schwarze Kugeln enthält, in dem Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 ... p_n.

Wir können hiebei

$$p_1 = \frac{a_1}{m}\; p_2 = \frac{a_2}{m} \ldots p_n = \frac{a_n}{m}$$

setzen, indem man die Brüche stets auf gleiche Nenner bringen kann. Dann setzen wir voraus, dass jede der Urnen m Kugeln enthält, von diesen sind in der ersten a_1, in der zweiten a_2 .... in der n^{ten} a_n weiss.

Die Ursache unseres jetzt gedachten Ereignisses ist nun das Ziehen einer Kugel aus einer der Urnen. Hiebei wird das Ziehen aus U_1 dem Ereignisse, dass eine weisse Kugel gezogen wird, die Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{a_1}{m}$ erteilen, die Urne U_2 die Wahrscheinlichkeit $p_2 = \frac{a_2}{m}$ ... die Urne U_n die Wahrscheinlichkeit $p_n = \frac{a_n}{m}$

Die Voraussetzung, dass jede der Ursachen gleich wahrscheinlich zur Wirkung

gelangt, ersetzen wir dadurch, dass wir die Urnen uns so aufgestellt denken, dass es gleich möglich ist, in irgend eine derselben hineinzugreifen. Also etwa so, dass sie in einem kreisförmigen Ring am Umfange aufgestellt sind, in dessen Mitte derjenige, der den Zug ausführt, mit verbundenen Augen steht. Die Scheibe wird langsam rotieren gelassen und der Ziehende greift in irgend einem Augenblick in irgend eine der Urnen und zieht eine weisse Kugel heraus.

Man frägt nun, welches ist die Wahrscheinlichkeit w_1, dass die Kugel der Urne U_1 entnommen wurde. Diese Wahrscheinlichkeit berechnen wir nach Formel 1, indem wir die möglichen und günstigen Fälle abzählen.

Da $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ weisse Kugeln überhaupt vorhanden sind, so sind nur so viele Fälle möglich für das Ziehen einer weissen Kugel. Alle sind gleich möglich, da es gleich möglich ist, den Zug aus irgend einer Urne zu machen.

Da aber in der Urne U_1 blos a_1 weisse Kugeln sind, so sind dafür, dass der Zug aus U_1 gemacht wurde, nur a_1 Fälle günstig, also ist

$$w_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

oder, wenn Zähler und Nenner durch m dividiert wird:

$$w_1 = \frac{\frac{a_1}{m}}{\frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m} + \ldots + \frac{a_n}{m}}$$

d. h. es ist

$$w_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Anmerkung 40. Es ist wichtig und tritt aus dem Gange des Beweises auch deutlich hervor, dass vorausgesetzt ist, dass das Ereignis wirklich eingetreten ist und dass erst dann die Wahrscheinlichkeit der wirkenden Ursache berechnet werden kann. Denn würde bei dem Zuge keine weisse Kugel gezogen werden, dann könnten wir auch nicht von der Wahrscheinlichkeit sprechen, dass die Urne U_1 bei dem Zuge einer weissen Kugel in Anspruch genommen wurde. Wir wüssten dann gar nicht, ob die Urnen überhaupt weisse Kugeln enthalten.

Frage 43. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese x, nachdem das Ereignis eingetreten ist?

Antwort. Man benutzt hiezu den Satz von *Bayes*, indem man voraussetzt, dass unendlich viele Ursachen wirken, welche dem Ereignisse verschiedene Wahrscheinlichkeiten erteilen.

Man setzt

$$p = f(x)$$

so dass die Hypotese x die Wahrscheinlichkeit p dem Ereignisse erteilt, dies heisst mit anderen Worten: Wirkt die Ursache, welche dem einfachen Ereignisse die Wahrscheinlichkeit x erteilt, so ist die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses $p = f(x)$. Da nun die Hypothese x alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, so ist nach dem Satze von Bayes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese x statt hat

$$w = \frac{f(x)}{\sum_{0}^{1}{}_{x} f(x)}$$

oder

$$w = \frac{f(x)\,\Delta x}{\sum_{0}^{1} f(x)\,\Delta x}$$

und wenn Δx zum dx übergeht, wo dann

$$\lim \sum_{0}^{1} f(x)\,\Delta x = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

wird, so ist

Formel 31: $$w = \frac{f(x)\,dx}{\int_{0}^{1} f(x)\,dx}$$

Die Wahrscheinlichkeit w ist unendlich klein, wie es sein muss, da unendlich viele Möglichkeiten vorliegen.

Frage 44: Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese zwischen den Grenzen a und b liegt?

Antwort. Da die Hypothese irgend einen Wert zwischen a und b haben kann, das Ereignis also als Folge

irgend einer dieser Hypothesen eintreten kann, so ist die verlangte Wahrscheinlichkeit die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, d. h. da diese Wahrscheinlichkeiten unendlich klein sind, das Integral zwischen den Grenzen a und b, daher

Formel 32: $$W = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{\int_a^1 f(x)\, dx}$$

hiebei muss selbstverständlich $o < a < 1$, $o < b < 1$ sein.

Anmerkung 41. Bezeichnet man die constante Grösse $\int_a^1 f(x)\, dx$ mit $\frac{1}{A}$ und setzt

$$y = A f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

so ist nach Formel 31

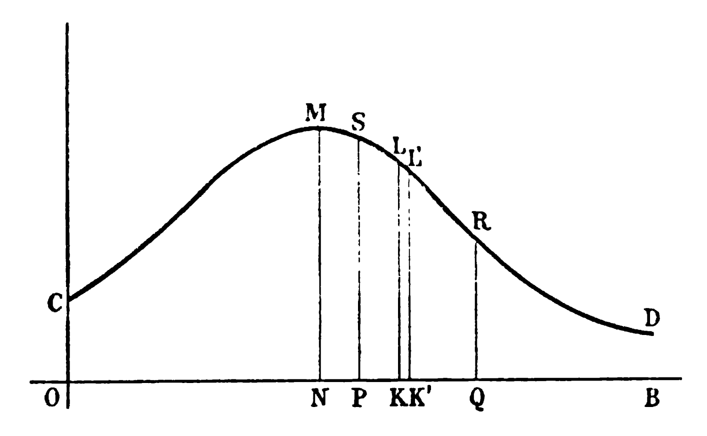
$$w = y\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und nach Formel 32

$$W = \int_a^b y\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Denkt man sich die Curve, welche durch die Gleichung (1) dargestellt ist (Figur 17), gezeichnet, indem man x und y als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene auffasst, und

Figur 17.



betrachtet den Teil, welcher über der Strecke $OB = 1$ liegt, so stellen die Ordinaten $KL = y$ das Mass der Wahrscheinlichkeit der Hypothese $OK = x$ dar. Die Wahrscheinlichkeit selbst ist durch den unendlich kleinen Flächenstreifen $KK'L'L$ dargestellt, wobei $KK' = dx$ ist. Dann sagt die Gleichung (3) aus, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese $OP = a$ und $OQ = b$ liege, durch die Fläche $PQRS$ dargestellt wird.

Die Fläche $OBDMC$ ist $= 1$ da $\int_o^1 y\, dx = \frac{1}{A} \int_o^1 f(x)\, dx = 1$ ist.

Frage 45. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit einer Ursache, wenn den Ursachen selbst vor dem Eintritte des Ereignisses verschiedene Wahrscheinlichkeiten zukommen und das Ereignis eingetreten ist?

Antwort. Sind $h_1, h_2 \dots h_n$ die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen U_1, $U_2 \dots U_n$ und sind $p_1, p_2 \dots p_n$ die Wahrscheinlichkeiten, welche diese Ursachen dem Ereignisse erteilen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ursache U_1 wirkte und dem Ereignisse die Wahrscheinlichkeit p_1 erteilte:

$$p_1' = h_1 p_1$$

die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit beider Ereignisse. Ebenso ist

$$p_2' = h_2 p_2$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Ursache U_2 dem Ereignisse die Wahrscheinlichkeit p_2 erteilt.

Nach dem Satz von *Bayes* ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Ursache U_i wirkte,

$$\textbf{Formel 33:}\ w_i = \frac{h_i p_i}{h_1 p_1 + h p_2 + \dots + h_n p_k}$$

hiebei muss

$$h_1 + h_2 + \dots + h_k = 1$$

sein, da sicher eine Ursache wirkte, nachdem das Ereignis stattfand.

Frage 46. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese, wenn den verschiedenen Hypothesen, vor dem Eintritte des Ereignisses verschiedene Wahrscheinlichkeiten zukommen?

Antwort. Ist

$$p = f(x)$$

die Wahrscheinlichkeit, welche die Hypothese x dem Ereignisse erteilt, und

$$h = \rho(x)$$

die Wahrscheinlichkeit vor dem Eintritte des Ereignisses, dass die Hypothese x statthat, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese x statthatte, nachdem das Ereignis eingetreten ist:

$$\textbf{Formel 34:}\ w = \frac{f(x) \cdot \rho(x)\, dx}{\int_0^1 f(x)\, \rho(x)\, dx}$$

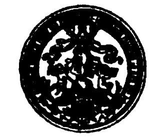
Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

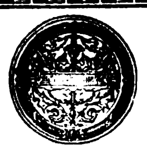
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

831. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Dritter Teil.
Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.
Forts. v. Heft 830. — Seite 177—192.
Mit 1 Figur.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen Trigonometrie,** synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere **Analysis,** Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren als: darstel'. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, **Militärs etc.**

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 830. — Seite 177—192. Mit 1 Figur.

Inhalt:

Stuttgart 1890.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht verger mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen B zweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen g

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der N verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Ver Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. Die Verlagsh

und die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese zwischen den Grenzen a und b liegt

Formel 35: $$W = \frac{\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,\rho(x)\,dx}$$

Beide beweisen sich genau so wie die Formeln 31 und 32.

Frage 47. Wann sagt man ein Ereignis habe eine Ursache, welche seinen Eintritt begünstigt?

Antwort. Hat ein Ereignis eine Wahrscheinlichkeit grösser als $\frac{1}{2}$ für den einmaligen Eintritt, so sagt man es existiert eine Ursache, welche den Eintritt begünstigt. So z. B. wenn man aus einer Urne, die 3 weisse und 2 schwarze Kugeln enthält, Kugeln zieht, so ist die Wahrscheinlichkeit eine weisse zu ziehen $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$, es ist also wahrscheinlicher eine weisse Kugel zu ziehen, als eine schwarze. Das öftere Ziehen einer weissen Kugel hat also eine Ursache, eben die, dass 3 weisse und blos 2 schwarze Kugeln vorhanden sind. Würde man nicht wissen, wie viel weisse und wie viel schwarze Kugeln die Urne enthält, würde aber nach einer Reihe von Zügen finden, dass man mehr weisse als schwarze Kugeln gezogen hat, so würde man schliessen, dass der Zug einer weissen Kugel gegenüber dem Zuge einer schwarzen Kugel begünstigt ist, dass also eine Ursache existiert, welche das öftere Erscheinen einer weissen Kugel bewirkt. Diese Ursache würde man einfach dahin deuten, dass die Urne mehr weisse als schwarze Kugeln enthält, dass also die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weissen Kugel grösser als $\frac{1}{2}$ ist.

Frage 48. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit einer Ursache, nachdem das Ereignis eingetreten ist?

Antwort. Nach Formel 32 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese x zwischen a und b liegt:

$$W = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}$$

Da eine Ursache dann angenommen wird, wenn $x > \frac{1}{2}$ ist, so hat man nur $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ anzunehmen und

Formel 36: $$W = \frac{\int_{1/2}^1 f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}$$

stellt die Wahrscheinlichkeit einer Ursache dar, welche den Eintritt des Ereignisses begünstigt.

Frage 49. Ein Ereignis ist bei $m+n$ Beobachtungen m-mal eingetreten, wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, das eine Ursache existiert, welche den Eintritt des Ereignisses begünstigt?

Antwort. Ist x die Hypothese, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei $m+n$ Versuchen m-mal eintritt nach Formel 8

$$\binom{m+n}{n} x^m (1-x)^n = f(x)$$

also ist nach Formel 36 die Wahrscheinlichkeit einer Ursache

$$W = \frac{\int_{1/2}^1 x^m (1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx}$$

oder auch

Formel 37: $$W = 1 - \frac{\int_0^{1/2} x^m (1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx}$$

da

$$\int_{1/2}^1 x^m (1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx - \int_0^{1/2} x^m (1-x)^n\,dx$$

ist.

Gelöste Aufgaben.

(Vergleiche hiezu die Formeln 30 bis 37.)

Aufgabe 194. Man hat aus einer Urne 1200 Züge gemacht und hiebei 810 weisse und 390 schwarze Kugeln gezogen, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man behaupten, dass in der Urne die weissen Kugeln zu den schwarzen im Verhältnisse von 2 : 1 das nahezu gleich 810 : 390 ist, stehen? Nach jedem Zuge wurde die Kugel zurückgelegt?

Auflösung. Hierüber gibt das Theorem von Bernoulli Aufschluss. Es ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

wobei

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2pqm}}$$

ist. Setzen wir daher

$$p = \frac{2}{3} \qquad q = \frac{1}{3}$$

wobei r sich dadurch bestimmt, dass

$$mp + r \geqq m' \geqq mp - r$$

also für unseren Fall

$$800 + r \geqq 810 \geqq 800 - r$$

d. h. $r = 10$ ist, wodurch

$$\gamma = \frac{10 . 3}{\sqrt{2 . 2 . 1 . 1200}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

oder

$$\gamma = 0{,}434$$

für welchen Wert die Tabelle liefert

$$W = 0{,}4568867$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also fast $\frac{1}{2}$

Aufgabe 195. Man hat vier Urnen. Von diesen enthält die Urne U_1 blos weisse Kugeln, die Urne U_2 enthält 6 weisse und 1 schwarze, die Urne U_3 enthält 2 weisse und 7 schwarze Kugeln, die Urne U_4 enthält blos schwarze Kugeln. Man hat blindlings aus einer Urne einen Zug gemacht und eine weisse Kugel gezogen. Welches sind die Wahrscheinlichkeiten, dass dieser Zug aus der Urne U_1, U_2, U_3 oder U_4 geschah?

Auflösung. Hiezu benutzen wir die Formel 30

$$w_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel aus der Urne U_1 ist

$$p_1 = 1$$

da blos weisse Kugeln in derselben vorhanden sind.

Die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weissen Kugel aus der zweiten Urne ist

$$p_2 = \frac{6}{7}$$

aus der dritten Urne

$$p_3 = \frac{2}{9}$$

und aus der vierten Urne ist

$$p_4 = 0$$

da sie keine weissen Kugeln enthält.

Da nun

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 + \frac{6}{7} + \frac{2}{9} + 0 = \frac{131}{63}$$

so ist

$$w_1 = \frac{63}{131}$$

$$w_2 = \frac{54}{131}$$

$$w_3 = \frac{14}{131}$$

$$w_4 = 0$$

Aufgabe 196. Man hat dieselben Urnen wie in Aufgabe 195. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weissen Kugel?

Auflösung. Da man die weisse Kugel aus irgend einer der Urnen ziehen kann, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass die weisse Kugel aus je einer der vier Urnen gezogen wurde. Nun ist von vornherein der Zug aus irgend einer der vier Urnen gleich wahrscheinlich, daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug aus irgend einer Urne geschieht

$$= \frac{1}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Zug der weissen Kugel aus der Urne U_1 setzt sich zusammen aus der Wahrscheinlichkeit, den Zug aus der Urne U_1 zu machen, die $= \frac{1}{4}$ ist, und der Wahrscheinlichkeit p_1, dass aus U_1 eine weisse Kugel gezogen wird, so ist also

$$\frac{1}{4} \cdot 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel aus U_2 zu ziehen, ist analog

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{7}$$

Die Wahrscheinlichkeit eine weisse Kugel aus U_3 zu ziehen, ist

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9}$$

und die Wahrscheinlichkeit eine weisse Kugel aus U_4 zu ziehen ist

$$\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{4} \cdot 0$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{131}{63}$$

$$= \frac{131}{252}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit a priori für den Zug einer weissen Kugel.

Aufgabe 197. In einer Urne sind 4 Kugeln. Man hat 4 Züge gemacht und hiebei 3 weisse und 1 schwarze Kugel gezogen. Welches sind die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen zulässigen Annahmen über die Anzahl der weissen und schwarzen Kugeln in der Urne?

Auflösung. Man kann offenbar folgende Annahmen machen. Die Urne enthält

1) 3 weisse, 1 schwarze
2) 2 „ 2 „
3) 1 „ 3 „ Kugeln.

Dann ergibt sich für diese Annahmen

1) $p_1 = \frac{3}{4} \qquad q_1 = \frac{1}{4}$

2) $p_2 = \frac{2}{4} \qquad q_2 = \frac{2}{4}$

3) $p_3 = \frac{1}{4} \qquad q_3 = \frac{3}{4}$

Nach Formel 8 ist aber die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 4 Zügen 3 weisse und 1 schwarze Kugel erscheint

$$4 p^3 q$$

daher werden nach den zu Grunde gelegten Annahmen sich die Wahrscheinlichkeiten ergeben:

1) $w_1 = 4 p_1^3 q_1 = \frac{27}{64}$

2) $w_2 = 4 p_2^3 q_2 = \frac{16}{64}$

3) $w_3 = 4 p_3^3 q_3 = \frac{3}{64}$

Mithin folgt nach dem Satz von Bayes, dass die Wahrscheinlichkeit

der 1ten Annahme $= \frac{27}{27+16+3} = \frac{27}{46}$

„ 2ten „ $= \frac{16}{27+16+3} = \frac{16}{46}$

„ 3ten „ $= \frac{3}{27+16+3} = \frac{3}{46}$

ist. Die wahrscheinlichste Annahme ist also die, dass die Urne 3 weisse und 1 schwarze Kugel enthält.

Aufgabe 198. Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln n an der Zahl. Bei einer vorgenommenen Ziehung erscheint eine weisse Kugel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne k weisse Kugeln enthält?

Auflösung. Die Urne kann enthalten

1	weisse	und	$n-1$	schwarze
2	„	„	$n-2$	„
3	„	„	$n-3$	„
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	„	„	$n-k$	„
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	„	„	0	„

Kugeln. Die diesen einzelnen Hypothesen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weissen Kugel sind dann:

$$p_1 = \frac{1}{n},\quad p_2 = \frac{2}{n},\quad p_3 = \frac{3}{n} \ldots p_k = \frac{k}{n} \ldots p_n = \frac{n}{n}$$

Nach Formel 30 wird daher die Wahrscheinlichkeit w_k, dass die Urne k weisse Kugeln enthält

$$w_k = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{k}{n}+\ldots+\frac{n}{n}}$$

$$= \frac{k}{1+2+3+\ldots+k+\ldots+n}$$

oder

$$w_k = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Die grösste Wahrscheinlichkeit ergibt sich dafür, dass die Urne n weisse Kugeln enthält, nämlich

$$w_n = \frac{2}{n+1}$$

Dies ist also die wahrscheinlichste Hypothese.

Erkl. 54. Die Summe

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der arithm. und geom. Progressionen.)

Aufgabe 199. Eine Urne enthält n Kugeln. Man zieht nach einander 5 Kugeln, von denen 3 weisse und 2 schwarze sind. Die gezogenen Kugeln werden nicht wieder zurückgelegt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne k weisse Kugeln enthält?

Auflösung. Unter den n Kugeln können:

$$\begin{array}{llll} 3 & \text{weisse und} & (n-3) & \text{schwarze} \\ 4 & \text{,, \quad ,,} & (n-4) & \text{,,} \\ \vdots & & \vdots & \\ k & \text{,, \quad ,,} & n-k & \text{,,} \\ \vdots & & \vdots & \\ n-2 & \text{,, \quad ,,} & 2 & \text{,,} \end{array}$$

Kugeln sein, und nur diese Annahmen sind zulässig.

Enthält die Urne 3 weisse und $(n-3)$ schwarze Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, nach und nach 3 weisse und 2 schwarze Kugeln zu ziehen:

$$p_3 = \frac{\binom{3}{3}\binom{n-3}{2}}{\binom{n}{5}}$$

Denn nach Anmerkung 9 kann man sich das Ziehen der 5 Kugeln auch so vorstellen, dass man alle 5 auf einmal zieht. Dann gibt es $\binom{n}{5}$ Arten, in denen sich die n Kugeln anordnen können. Von diesen sind aber bloss $\binom{3}{3}\binom{n-3}{2}$ solche, die 3 weisse und 2 schwarze Kugeln enthalten, indem jede Anordnung der $(n-3)$ schwarzen Kugeln zu 2 mit der einen Gruppe von 3 Kugeln eine der verlangten Art gibt.

Enthält die Urne 4 weisse und $(n-4)$ schwarze, so wird analog die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von 3 weissen und 2 schwarzen Kugeln

$$p_4 = \frac{\binom{4}{3}\binom{n-4}{2}}{\binom{n}{5}}$$

Enthält die Urne k weisse und $(n-k)$ schwarze Kugeln, so wird

$$p_k = \frac{\binom{k}{3}\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{5}}$$

die Wahrscheinlichkeit, 3 weisse und 2 schwarze Kugeln zu ziehen. Für die letzte Hypothese wird schliesslich

$$p_{n-2} = \frac{\binom{n-2}{3}\binom{2}{2}}{\binom{n}{5}}$$

Die Wahrscheinlichkeit w_k, dass die Urne k weisse, also $n-k$ schwarze Kugeln enthält, wird nach Formel 30

$$w_k = \frac{\frac{\binom{k}{3}\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{5}}}{\frac{\binom{3}{3}\binom{n-3}{2}}{\binom{n}{5}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{n-4}{2}}{\binom{n}{5}} + \ldots + \frac{\binom{k}{3}\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{5}} + \ldots + \frac{\binom{n-2}{3}\binom{2}{2}}{\binom{n}{5}}}$$

oder

$$w_k = \frac{\binom{k}{3}\binom{n-k}{2}}{\binom{3}{3}\binom{n-3}{2} + \binom{4}{3}\binom{n-4}{2} + \ldots + \binom{k}{3}\binom{n-k}{2} + \ldots + \binom{n-2}{3}\binom{2}{2}}$$

Aufgabe 200. Von zwei Urnen U_1 und U_2 enthält die erste a weisse, b schwarze Kugeln, die andere U_2 enthält α weisse, β schwarze Kugeln. Man zieht nun aus einer der Urnen unbekannt aus welcher auf einmal $(m+n)$ Kugeln, von denen m weiss und n schwarz sind. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug aus U_1 geschah?

Auflösung. Es sei p_1 die Wahrscheinlichkeit dafür aus U_1 auf einmal m weisse und n schwarze Kugeln zu ziehen und p_2 die Wahrscheinlichkeit für denselben Zug aus U_2. Dann ist nach Aufgabe 25 Anmerkung 10

$$p_1 = \frac{\binom{a}{m}\binom{b}{n}}{\binom{a+b}{m+n}}$$

und

$$p_2 = \frac{\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n}}{\binom{\alpha+\beta}{m+n}}$$

Ist also w_1 die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass nämlich der Zug aus U_1 geschieht, dann ist nach Formel 30

$$w = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

$$w = \frac{\frac{\binom{a}{m}\binom{b}{n}}{\binom{a+b}{m+n}}}{\frac{\binom{a}{m}\binom{b}{n}}{\binom{a+b}{m+n}} + \frac{\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n}}{\binom{\alpha+\beta}{m+n}}}$$

Hiebei ist selbstverständlich $m < a$ und $m < \alpha$, ebenso $n < b$ und $n < \beta$ vorausgesetzt. Denn wäre etwa $n > \beta$, so könnte der Zug aus der zweiten Urne U_2 nicht geschehen.

Aufgabe 201. Eine Urne U_1 enthält 3 Kugeln, eine zweite U_2 enthält 3 weisse und 4 schwarze Kugeln. Man zieht aus U_1 eine Kugel und wirft sie in U_2. Sodann zieht man aus U_2 auf einmal 3 Kugeln und findet, dass von ihnen 2 weiss und 1 schwarz ist. Welches ist Wahrscheinlichkeit dafür, dass in U_1 sich 2 weisse und 1 schwarze Kugel befinden?

Auflösung. Die Urne U_1 kann enthalten

1) 0 schwarze, 3 weisse
2) 1 „ 2 „
3) 2 „ 1 „
4) 3 „ 0 „ Kugeln.

Diesen Annahmen entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weissen Kugel aus U_1

$$1) \ldots p_1 = 1$$

$$2) \ldots p_2 = \frac{2}{3}$$

$$3) \ldots p_3 = \frac{1}{3}$$

$$4) \ldots p_4 = 0$$

für den Zug einer schwarzen Kugel aus U_1

$$5) \ldots q_1 = 0$$

$$6) \ldots q_2 = \frac{1}{3}$$

$$7) \ldots q_3 = \frac{2}{3}$$

$$8) \ldots q_4 = 1$$

Hat man nun eine weisse Kugel aus U_1 gezogen und wirft sie in U_2, so enthält U_2 dann 4 weisse und 4 schwarze, hat man aber eine schwarze Kugel aus U_1 gezogen und wirft sie in U_2, so enthält U_2 dann 3 weisse und 5 schwarze Kugeln. Im ersten Falle ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von 2 weissen und 1 schwarzen Kugel nach Aufgabe 25 Anmerkung 10

$$r_1 = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{6}{14}$$

im zweiten Falle

$$r_2 = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$$

Wir müssen nun für alle 8 Fälle die Wahrscheinlichkeiten berechnen, für das Ziehen von 2 weissen und 1 schwarzen Kugel aus U_2.

Wird eine weisse Kugel aus U_1 gezogen, so sind nach den obigen vier Annahmen die Wahrscheinlichkeiten des zusammengesetzten Ereignisses

$$1) \ldots p_1 r_1 = 1 \cdot \frac{6}{14}$$

$$2) \ldots p_2 r_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{14}$$

$$3) \ldots p_3 r_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{14}$$

$$4) \ldots p_4 r_1 = 0 \cdot \frac{6}{14}$$

Wird eine schwarze Kugel gezogen, so ergeben sich analog die zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten:

$$5) \ldots q_1 r_2 = 0 \cdot \frac{15}{56}$$

$$6) \ldots q_2 r_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{56}$$

$$7) \ldots q_3 r_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{56}$$

$$8) \ldots q_4 r_2 = 1 \cdot \frac{15}{56}$$

Nun entsprechen die Fälle 2 und 6 der Annahme, dass U_1 2 weisse und 1 schwarze Kugel enthält. So dass nach dem Satze von Bayes Formel 30

$$w = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{56}}{1 \cdot \frac{6}{14} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{56} + \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{56} + 1 \cdot \frac{15}{56}}$$

$$w = \frac{63}{234} = \frac{7}{26}.$$

Aufgabe 202. Eine Urne enthält a schwarze und weisse Kugeln, man wirft noch m weisse und n schwarze hinein und zieht dann auf einmal $\mu + \nu$ Kugeln heraus, von den μ weiss und ν schwarz sich erweisen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Urne $a - k$ weisse und k schwarze Kugeln enthielt?

Auflösung. Man kann bezüglich der a Kugeln in der Urne folgende Annahmen machen. Die Urne enthält:

1) a weisse, 0 schwarze
2) $a-1$ „ 1 „
⋮
i) $a-i$ „ i „
⋮
$a+1$) 0 „ a „ Kugeln.

Der i^{ten} Annahme entsprechend enthält die Urne, nachdem man noch m weisse und n schwarze Kugeln eingeworfen hat, $(m+a-i)$ weisse und $(n+i)$ schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit sodann, aus U_1 auf einmal μ weisse und ν schwarze Kugeln zu ziehen, ist.

$$p_i = \frac{\binom{m+a-i}{\mu}\binom{n+i}{\nu}}{\binom{m+n+a}{\mu+\nu}}$$

Nach dem Satze von Bayes wird dann die Wahrscheinlichkeit der Annahme, dass die Urne $(a-k)$ weisse und k schwarze Kugeln enthält, sich nach Formel 30 ergeben:

$$w = \frac{\dfrac{\binom{m+a-k}{\mu}\binom{n+k}{\nu}}{\binom{m+n+a}{\mu+\nu}}}{\sum\limits_{i=o}^{i=a}\dfrac{\binom{m+a-i}{\mu}\binom{n+i}{\nu}}{\binom{m+n+a}{\mu+\nu}}}$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $\binom{m+n+a}{\mu+\nu}$ multipliziert:

$$w = \frac{\binom{m+a-k}{\mu}\binom{n+k}{\nu}}{\sum\limits_{i=o}^{=a}\binom{m+a-i}{\mu}\binom{n+i}{\nu}}.$$

Aufgabe 203. Man berechne den Wert des Integrales

$$J_{m,n} = \int\limits_o^1 x^m (1-x)^n\, dx$$

Auflösung. Da $m \geqq o$ ist, so ergibt sich durch partielle Integration, siehe nebenstehende Erklärung:

$$\int x^m (1-x)^n\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n + \frac{n}{m+1}\int x^{m+1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

also ergibt sich das bestimmte Integral

$$\int\limits_o^1 x^m (1-x)^n\, dx = \frac{n}{m+1}\int\limits_o^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

oder

$$J_{m,n} = \frac{n}{m+1} J_{m+1,\,n-1}$$

daher:

$$J_{m+1,\,n-1} = \frac{n-1}{m+2} J_{m+2,\,n-2}$$

$$J_{m+2,\,n-2} = \frac{n-2}{m+3} J_{m+3,\,n-3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$J_{m+n-1,\,1} = \frac{1}{m+n} J_{m+n,\,o}$$

Erkl. 55. Die partielle Integration ist in der Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

enthalten. (Siehe Kleyers Lehrb. der Integralrechnung.)

und durch Multiplikation der Gleichungen folgt:

$$J_{m,n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots..1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots m+n} J_{m+n,o}$$

Nun ist

$$J_{m+n,o} = \int_o^1 x^{m+n}\, dx = \frac{1}{m+n+1}$$

also ergibt sich

$$J_{m,n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)(m+n+1)}$$

oder

$$\text{Formel g: } J_{m,n} = \int_o^1 x^m (1-x)^n\, dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

Aufgabe 204. Man berechne $J_{m,n}$ unter der Voraussetzung, dass m und n grosse Zahlen sind.

Auflösung. Werden m und n als grosse Zahlen vorausgesetzt, so kann man die Faktoriellen durch die Stirlingsche Formel f (siehe Anhang I) ersetzen.

Es ist:

$$m! = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$(m+n)! = (m+n)^{m+n} e^{-m-n} \sqrt{2\pi(m+n)}$$

also ist

$$\frac{m!\,n!}{(m+n)!} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} \sqrt{\frac{2\pi m n}{m+n}}$$

daher

$$J_{m,n} = \frac{m^m n^n}{(m+n+1)(m+n)^{m+n}} \sqrt{\frac{2\pi m n}{m+n}}$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)^{m+1/2} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n+1/2} \frac{\sqrt{2\pi(m+n)}}{m+n+1}$$

Nun kann, da $m+n$ eine sehr grosse Zahl ist, die 1 dagegen vernachlässigt werden, so dass an Stelle von

$$\frac{\sqrt{2\pi(m+n)}}{m+n+1}$$

gesetzt werden kann

$$\frac{\sqrt{2\pi(m+n)}}{m+n} = \sqrt{\frac{2\pi}{m+n}}$$



wodurch die

$$\textbf{Formel h:}\ J_{m,n} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^{m+1/2} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n+1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{m+n}}$$

sich ergibt.

Aufgabe 205. Ein Ereignis ist bei $2m$ Versuchen m mal eingetreten, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ursache seinen Eintritt begünstigt?

Auflösung. Nach Formel 37 ist die Wahrscheinlichkeit einer Ursache

$$W = 1 - \frac{\int_0^{1/2} x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx}$$

wenn das Ereignis bei $m+n$ Versuchen m mal eingetreten ist. Für unsere Aufgabe ist $n = m$ also

$$W = 1 - \frac{\int_0^{1/2} x^m (1-x)^m dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^m dx}$$

Nun ist aber

$$\int_0^1 x^m (1-x)^m dx = \int_0^{1/2} x^m (1-x)^m dx + \int_{1/2}^1 x^m (1-x)^m dx$$

In dem zweiten Integral setzen wir an Stelle von x die Integrationsvariable $y = 1 - x$, also $x = 1 - y$ und $dx = -dy$ ein, also wird

$$\text{für}\quad x = \frac{1}{2} \ldots y = \frac{1}{2}$$

$$\text{„}\quad x = 1 \ldots y = 0$$

so dass

$$\int_{1/2}^1 x^m (1-x)^m dx = -\int_{1/2}^0 (1-y)^m y^m dy$$

$$= \int_0^{1/2} y^m (1-y)^m dy$$

sich ergibt, oder wenn wir die Integrationsvariable wieder mit x bezeichnen, statt mit y, so ist

$$\int_{1/2}^1 x^m (1-x)^m dx = \int_0^{1/2} x^m (1-x)^m dx$$

also wird

$$\int_0^1 x^m (1-x)^m dx = 2\int_0^{1/2} x^m (1-x)^m dx$$

oder

$$W = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d. h. es ist ebenso wahrscheinlich, dass eine Ursache das Ereignis begünstigt, als dass eine Ursache das Ereignis nicht begünstigt. Ein Resultat, das wir auch von vornherein vermuten konnten, denn wenn das Ereignis ebenso oft eintritt als nicht eintritt, dann existiert eben keine Ursache, welche seinen Eintritt begünstigt, oder es ist ebenso wahrscheinlich, dass sein Eintritt begünstigt wird, als dass dieses nicht der Fall ist.

Aufgabe 206. Ein Ereignis wurde m-mal beobachtet, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ursache existiert, die seinen Eintritt begünstigt?

Auflösung. Wir haben in der Formel 37

$$W = 1 - \frac{\int_o^{1/2} x^m (1-x)^n \, dx}{\int_o^1 x^m (1-x)^n \, dx}$$

$n = o$ zu setzen, da das Ereignis in allen beobachteten Fällen eintrat, also ist

$$W = 1 - \frac{\int_o^{1/2} x^m \, dx}{\int_o^1 x^m \, dx}$$

und da

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

ist, so ist:

$$\int_o^{1/2} x^m \, dx = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2^{m+1}}$$

$$\int_o^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}$$

also wird

$$W = 1 - \frac{1}{2^{m+1}}$$

Aufgabe 207. Ein Ereignis wurde $(m+n)$-mal beobachtet, wobei es m-mal eintrat und n-mal nicht eintrat. Unter der Voraussetzung, dass $m > n$ ist, soll die Wahrscheinlichkeit einer Ursache bestimmt werden, die das Eintreten des Ereignisses begünstigt, wobei m und n sehr grosse Zahlen sind.

Auflösung. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist nach Formel 37

$$W = 1 - \frac{\int_o^{1/2} x^m (1-x)^n \, dx}{\int_o^1 x^m (1-x)^n \, dx} \, .$$

und es handelt sich nur darum, diesen Wert zur Berechnung tauglich zu machen, wenn m und n grosse Zahlen sind.

Was den Nenner anbelangt, so ist derselbe schon durch die Formel h gegeben:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = J_{m,n} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^{m+1/2} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n+1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{m+n}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Den Zähler berechnen wir näherungsweise. Da $m > n$ ist, so wird

$$\frac{d\, x^m (1-x)^n}{d\, x} = x^{m-1} (1-x)^{n-1} [m-(m+n)\, x]$$

im Integrationsintervall o bis $\frac{1}{2}$ stets positiv sein, denn es ist innerhalb desselben $x \leqq \frac{1}{2}$ also ist

$$[m-(m+n)\, x] \geqq \left[m - \frac{1}{2}(m+n)\right] > o$$

da $m > n$ ist. Mithin wird die Funktion $x^m(1-x)^n$ in dem Intervall von 0 bis $\frac{1}{2}$ wachsen und hat daher für $x = \frac{1}{2}$ den grössten Wert, den sie im Integrationsintervall annehmen kann, nämlich den Wert

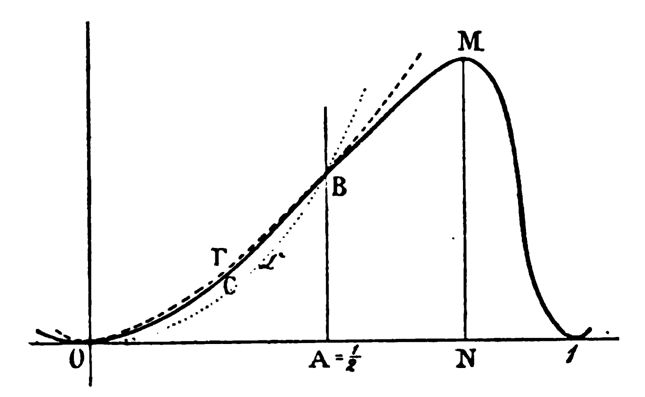
$$Y = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}$$

Stellen wir die Curve, deren Gleichung

$$y = x^m (1-x)^n$$

ist, in Figur 18 durch die Linie C dar, so

Fig. 18.



werden die Ordinaten y von O bis M wachsen, wobei M die Abscisse $ON = \frac{m}{m+n} > \frac{1}{2}$ hat.

Ist $OA = \frac{1}{2}$, so ist $AB = Y = \frac{1}{2^{m+n}}$. Das Integral

$$J = \int\limits_o^{1/2} x^m (1-x)^n \, dx = \int\limits_o^{1/2} y \, dx$$

ist die Fläche $OABCO$, welche das Stück OCB der Curve C mit der x-Achse begrenzt.

Betrachten wir nun eine zweite Curve Γ, deren Gleichung:

$$\eta = \frac{x^{m-n}}{2^{2n}}$$

ist, so geht dieselbe durch den Punkt O und B, denn für $x = o$ und $x = \frac{1}{2}$ wird $y = \eta$. In diesen Punkten hat die Curve Γ auch dieselbe Tangente wie C. Denn es ist

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{m-n}{2^{2n}} x^{m-n-1}$$

also für $x = o$ ist

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=o} = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=o} = o$$

sobald $m > n+1$ ist, da sonst Γ eine Gerade ist. Ebenso ist

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1/2} = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=1/2} = \frac{m-n}{2^{m+n-1}}$$

Nun ist überdies für $o \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ stets

$$\eta > y$$

denn es ist

$$\eta - y = x^{m-n}\left[\frac{1}{2^{2n}} - x^n(1-x)^n\right]$$

Der Ausdruck

$$x^n(1-x)^n$$

hat seinen grössten Wert für $x = \frac{1}{2}$, für welchen er gleich

$$\frac{1}{2^{2n}}$$

wird. Daher ist, so lange $o \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ ist, stets

$$\frac{1}{2^{2n}} > x^n(1-x)^n$$

also

$$\eta - y > o$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ **Das vollständige**

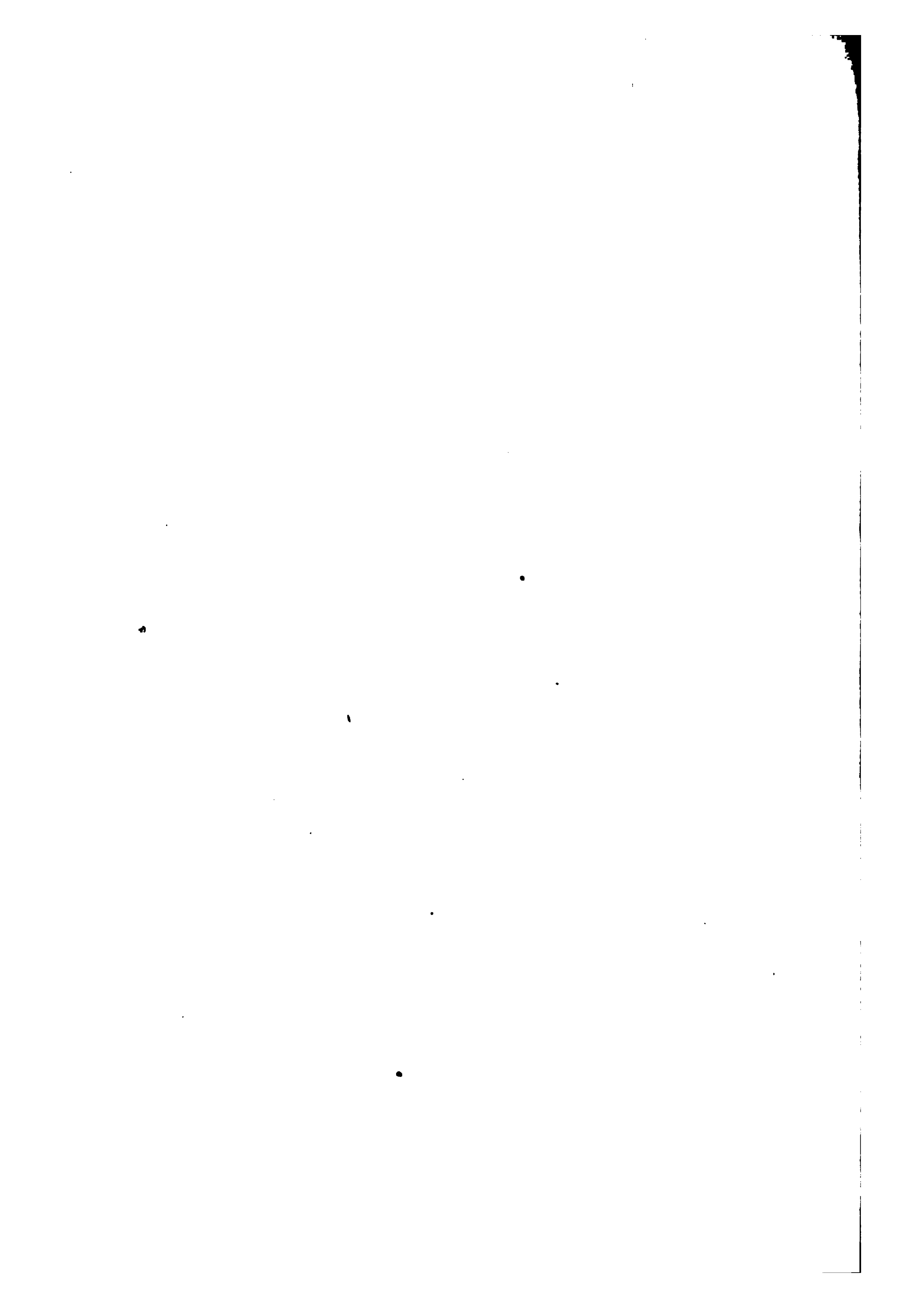
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



840. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Dritter Teil.
Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.
Forts. v. Heft 831. — Seite 193—208.
Mit 1 Figur.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 831. — Seite 193—208. Mit 1 Figur.

Inhalt:

Stuttgart 1890.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die **Lösung** jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des **Studierenden** überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt** werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand des Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden** der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen **Arbeiten** eine **vollständige** Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten.** Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht v[illegible]en mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Be[illegible]fs-zweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft verleihen** [illegible]nd somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** g[illegible]en.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktis[illegible]ufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe de[illegible]en verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimm[illegible]er, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird d[illegible]ng thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagsh[illegible]**

Da auch für Werte von x die zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen noch

$$\frac{1}{2^{2n}} > x^n (1-x)^n$$

ist, so berühren einander die Curven Γ und C von aussen im Punkte B, indem sowohl vor B als hinter B die Ordinaten $\eta > y$ sind.

Die Curve Γ ist in der Figur 18 gestrichelt.

Für das ganze Intervall von O bis $\frac{1}{2}$ ist

$$\eta > y$$

also ist auch

$$\int_o^{1/2} \eta\, dx > \int_o^{1/2} y\, dx$$

oder es ist

$$J < \int_o^{1/2} \frac{x^{m-n}}{2^{2n}}\, dx$$

d. h.

$$J < \frac{1}{(m-n+1)\, 2^{m+n+1}}$$

Wir setzen daher

$$J = \frac{1}{(m-n+1)\; 2^{m+n+1}}\; (1-\varepsilon) \;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

wobei $o \leqq \varepsilon < 1$ ist.

Um auch für ε eine bessere Grenze zu haben, betrachten wir noch eine dritte Curve $\mathfrak{C}$, deren Gleichung

$$\mathfrak{y} = x^{m+n}$$

ist. Auch diese geht durch die Punkte O und B, denn es ist

$$(\mathfrak{y})_{x=o} = (y)_{x=o} = O$$

$$(\mathfrak{y})_{x=1/2} = (y)_{x=1/2} = \frac{1}{2^{m+n}}$$

Es ist aber in dem Intervalle von O bis $\frac{1}{2}$ immer

$$y > \mathfrak{y}.$$

Denn es ist

$$y - \mathfrak{y} = x^m \left[(1-x)^n - x^n\right]$$

und da

$$x < \frac{1}{2}$$

also

$$2x < 1$$

$$x < 1 - x$$

ist, so ist

$$x^n < (1-x)^n$$

also

$$y - \mathfrak{y} > o$$

im ganzen Intervalle. Daher ist

$$\int_0^{1/2} y\,dx > \int_0^{1/2} \mathfrak{y}\,dx$$

oder

$$J > \int_0^{1/2} x^{m+n}\,dx$$

d. h.

$$J > \frac{1}{(m+n+1)\,2^{m+n+1}}$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (2)

$$\frac{1}{(m-n+1)\,2^{m+n+1}}(1-\varepsilon) > \frac{1}{(m+n+1)\,2^{m+n+1}}$$

daher

$$1-\varepsilon > \frac{m-n+1}{m+n+1}$$

oder

$$\varepsilon < \frac{2n}{m+n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Setzt man nun die gefundenen Werte der Integrale aus den Gleichungen (1) und (2) in die Formel für W ein, so erhält man:

$$W = 1 - \frac{1-\varepsilon}{(m-n+1)\,2^{m+n+1}} \cdot \left(\frac{m+n}{m}\right)^{m+1/2} \left(\frac{m+n}{n}\right)^{n+1/2} \sqrt{\frac{m+n}{2\pi}}$$

oder man hat die

Formel 38:

$$W = 1 - \frac{1}{\mu}(1-\varepsilon)$$

$$\mu = \frac{2\,(m-n+1)\,m^m n^n \sqrt{2\pi m n}}{(m+n)^{3/2}\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}}$$

$$\varepsilon < \frac{2n}{m+n+1}$$

Aufgabe 208. Aus einer Urne, die weisse und schwarze Kugeln in unbekannter Anzahl enthält, wurden 10000 Züge gemacht, hiebei 6538 weisse und 3462 schwarze Kugeln gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Urne mehr weisse als schwarze Kugeln enthält? Die gezogene Kugel wird stets wieder zurückgelegt.

Auflösung. Wir haben hiezu die Formel 38 zu benutzen, denn die Wahrscheinlichkeit, dass mehr weisse als schwarze Kugeln vorhanden sind, ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer Ursache, welche das Ziehen einer weissen Kugel begünstigt. Die Wahrscheinlichkeit W ist also

$$W = 1 - \frac{1}{\mu}(1-\varepsilon)$$

$$\mu = \frac{2\,(m-n+1)\,m^m n^n \sqrt{2\pi m n}}{(m+n)^{3/2}\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}}$$

Nebenrechnung:

$$\log m = 3{,}8154449$$
$$\log n = 3{,}5393271$$
$$\log \frac{m+n}{2} = 3{,}6989700$$
$$\log (m-n+1) = 3{,}4879863$$

$$\left.\begin{array}{r}\log (\log m) = 0{,}5815452 \\ \log m = 3{,}8154449\end{array}\right\} + \quad 4{,}3970901$$

$$m \log m = 24951{,}2$$

$$\left.\begin{array}{r}\log (\log n) = 0{,}5489207 \\ \log n = 3{,}5393271\end{array}\right\} + \quad 4{,}0882478$$

$$n \log n = 12253{,}1$$

wobei

$$m+n = 10000$$
$$m = 6538$$
$$n = 3462$$
$$m-n+1 = 3076$$

ist.

Es ergibt sich folgende Rechnung

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log (m-n+1) = 3{,}4879863$$
$$m \log m = 24951{,}2000000$$
$$n \log n = 12253{,}1000000$$
$$\frac{1}{2} \log m = 1{,}9077224$$
$$\frac{1}{2} \log n = 1{,}7696635$$
$$\frac{1}{2} \log \pi = 0{,}2485749$$
$$\frac{1}{2} \log 2 = 0{,}1505150$$
$$\log Z = 37211{,}1654921$$

$$(m+n) \log \left(\frac{m+n}{2}\right) = 36989{,}700$$
$$\frac{3}{2} \log (m+n) = 6{,}000$$
$$\log N = 36995{,}700$$

also

$$\left.\begin{array}{r}\log Z = 37211{,}1654921 \\ \log N = 36995{,}7000000\end{array}\right\} -$$
$$\log \mu = 215{,}4654921$$

Es ist μ also eine **216** zifferige Zahl, daher $\frac{1}{\mu}$ eine unendlich kleine Zahl, von deren Grösse man kaum eine Vorstellung hat. Es wird mithin W von 1 nur um eine unendlich kleine Grösse verschieden sein.

Anmerkung 42. Wie das vorstehende Beispiel zeigt, genügt es den log μ seiner Mantisse nach blos zu bestimmen, um die Anzahl ganzer Stellen von μ zu erhalten. Hiezu genügt aber folgende Entwicklung. Es ist

$$\log \mu = \log \frac{2\,(m-n+1)\sqrt{2\,\pi\,m\,n}}{(m+n)^{3/2}} + 0{,}43429448\; l\, \frac{m^m\, n^n}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}}$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bedeutet ($0{,}43429448 = \log e$. Siehe Kleyer, Lehrbuch der Differential- und Integralralrechnung).

Nun ist für $z < 1$ (siehe Kleyer, Lehrb. der Integralrechnung):

$$l\,(1+z) = z - \frac{1}{2}\,z^2 + \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{1}{4}\,z^4 + \ldots.$$

also folgt, da $\frac{m-n}{m+n}$ ein kleiner Bruch ist:

$$l\left(\frac{2m}{m+n}\right) = l\left(1 + \frac{m-n}{m+n}\right) = \left(\frac{m-n}{m+n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 - \ldots\ldots$$

$$l\left(\frac{2n}{m+n}\right) = l\left(1 - \frac{m-n}{m+n}\right) = -\left(\frac{m-n}{m+n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 - \ldots\ldots$$

und mithin ist:

$$l \frac{m^m n^n}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}} = m\ l\left(\frac{2m}{m+n}\right) + n\ l\left(\frac{2n}{m+n}\right)$$

$$= \frac{(m-n)^2}{m+n} - \frac{1}{2}\frac{(m-n)^2}{m+n} + \frac{1}{3}\frac{(m-n)^4}{(m+n)^3} - \frac{1}{4}\frac{(m-n)^4}{(m+n)^3} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{1.2}\frac{(m-n)^2}{(m+n)} + \frac{1}{3.4}\frac{(m-n)^4}{(m+n)^3} + \frac{1}{5.6}\frac{(m-n)^6}{(m+n)^5} + \cdots\cdots$$

oder:

$$l \frac{m^m n^n}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}} = (m+n)\left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^4 + \frac{1}{5.6}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^6 + \cdots\right]$$

so dass schliesslich sich die

Formel 38' $$\log \mu = \log \frac{2\,(m-n+1)\sqrt{2\pi m n}}{(m+n)^{3/2}}$$

$$+ 0{,}43429448\ (m+n)\left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^4 + \cdots\right]$$

ergibt.

Aufgabe 209. Eine Münze wird 1000 mal in die Höhe geworfen, wobei 592 mal Wappen und 408 mal Schrift auffällt. Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, dass das öftere Auffallen von Wappen eine Ursache hat?

Erkl. 56. Diese Ursache liegt in der Konstitution der Münze, indem dieselbe nicht homogen ist in ihrem Material. Auf diese Art lässt sich auch ein Schluss ziehen, ob die Münze homogen ist.

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach Formel 38

$$W = 1 - \frac{1}{\mu}(1-\varepsilon)$$

wobei nach Formel 38'

$$\log \mu = \log \frac{2\,(m-n+1)\sqrt{2\pi m n}}{(m+n)^{3/2}}$$

$$+ 0{,}43429\ (m+n)\left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 + \cdots\right]$$

ist. Hiebei ist

$$m+n = 1000$$
$$m = 592$$
$$n = 408$$
$$m-n+1 = 85$$

Da

$$\frac{m-n}{m+n} = 0{,}084$$

also

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = 0{,}007056$$

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^4 = 0{,}000049787$$

Nebenrechnung:

$$\log(m-n) = 1{,}9242793$$
$$\log(m+n) = 3,$$
$$\log\left(\frac{m-n}{m+n}\right) = 0{,}9242793-2$$
$$\log\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = 0{,}8485586-3$$
$$\log\left(\frac{m-n}{m+u}\right)^4 = 0{,}6971172-5$$

$$\log m = 2{,}7723217$$
$$\log n = 2{,}6106602$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$6{,}1811618$$
$$\log \sqrt{2\pi m n} = 3{,}0905809$$

ist, so genügt, diese zwei Glieder der Reihe zu nehmen, und es ist:

$$0{,}43429 \,.\, 10000 \left[\frac{1}{2}\, 0{,}007056 + \frac{1}{12}\, 0{,}00005\right]$$
$$= 434{,}29 \,.\, 0{,}003531$$
$$= 1{,}53$$

Ferner ist

$$\left.\begin{array}{ll} \log 2(m-n+1) & = 2{,}2304489 \\ \log \sqrt{2\pi m n} & = 3{,}0905809 \end{array}\right\} +$$
$$\left.\begin{array}{ll} & 5{,}3210298 \\ \frac{3}{2}\log(m+n) & = 4{,}5 \end{array}\right\} -$$
$$0{,}8210298$$

Es ist mithin

$$\log \mu = 2{,}3510298$$

also

$$\mu = 224{,}4$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze nicht homogen ist, ist also

$$W = 1 - \frac{1}{224{,}4}\,(1-\varepsilon).$$

also sicherlich grösser als

$$W = 1 - \frac{1}{224}$$

Anmerkung 43. Dieses Beispiel zeigt deutlich die Unzulässigkeit der folgenden Schlussweise. Man will eine Münze 1200 mal werfen, dann hat man nach dem Gesetze der grossen Zahlen (Bernoullisches Theorem) mit der grössten Wahrscheinlichkeit zu erwarten, dass fast 600 mal Wappen und 600 mal Schrift fällt. Hat man also 1000 Würfe gethan und ist Wappen 592 mal gefallen, während Schrift bloss 408 mal erschien, so könnte man sich versucht fühlen zu glauben, dass nun in den 200 folgenden Würfen Wappen weniger oftmal erscheint als Schrift, damit ein Ausgleich gegen 600 maliges Erscheinen jedes eintritt. Dies ist aber durchaus falsch. Abgesehen davon, dass ein bereits gemachter Wurf einen folgenden gar nicht beeinflussen kann, die 1000 bereits gemachten Würfe auf die 200 folgenden also in keiner Weise einwirken können, zeigt das vorangehende Beispiel, dass gerade das entgegengesetzte von der obigen Schlussweise richtiger ist. Denn es ist mit einer Wahrscheinlichkeit $W > 1 - \frac{1}{224}$ anzunehmen, dass eine Ursache das Erscheinen von Wappen begünstigt, dass also auch in den 200 folgenden Würfen Wappen öfters erscheint als Schrift. Vergleiche Aufgabe 242 und 243.

Dass obiger falscher Schluss aber doch vielfach gemacht wird, ist auch daraus zu entnehmen, dass die Nummern einer Zahlenlotterie, die lange nicht mehr gezogen wurden, viel stärker von den Spielern besetzt werden, als die andern Nummern.

Aufgabe 210. In den 10 Jahren von 1817 bis 1826 sind in Frankreich 9656135 Kinder geboren worden, unter denen 4981566 Knaben waren. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine konstante Ursache existiert, die einer Knabengeburt gegenüber einer Mädchengeburt begünstigt?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach Formel 38

$$W = 1 - \frac{1}{\mu}\,(1-\varepsilon)$$

wobei nach Formel 38'

$$\log \mu = \log \frac{2\,(m-n+1)\,\sqrt{2\,\pi\,m\,n}}{(m+n)^{3/2}}$$

$$+ 0{,}43429448\,(m+n)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^4 + \right]$$

$$= A + B$$

ist und

$$m+n = 9656135$$
$$m = 4981566$$
$$n = 4674569$$
$$m-n = 306997$$

Da nun, wie aus nebenstehender Rechnung folgt

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = 0{,}00101079$$

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^4 = 0{,}00000102$$

ist, so genügt, diese beiden Glieder zu berücksichtigen und es ist:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^4 = 0{,}00050547$$

Nebenrechnung:

$$\log (m-n) = 5{,}4871341$$
$$\log (m+n) = 6{,}9848034 \quad -$$
$$0{,}5023307 - 2$$
$$\log \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = 0{,}0046614 - 3$$
$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = 0{,}00101079$$
$$\log \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^4 = 0{,}0083228 - 6$$
$$\left(\frac{m-n}{m-n}\right)^4 = 0{,}0000010193$$

Daher berechnet sich der zweite Summand B in folgender Weise:

$$\log (m+n) = 6{,}9848034$$
$$\log 0{,}43429448 = 0{,}6377843 - 1$$
$$\log 0{,}00050547 = 0{,}7036954 - 4$$
$$\log B = 3{,}3262831$$
$$B = 2119{,}74$$

für den ersten Summanden A folgt:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log (m-n) = 5{,}4871341$$
$$\log \sqrt{2\,\pi\,m\,n} = 7{,}0826437$$
$$= 12{,}8708078$$
$$\log (m+n)^{3/2} = 10{,}4772051 \quad -$$
$$A = 2{,}3936027$$

Nebenrechnung:

$$\log m = 6{,}6973659$$
$$\log n = 6{,}6697416$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$14{,}1652874$$
$$\log \sqrt{2\,\pi\,m\,n} = 7{,}0826437$$

Also

$$A = 2{,}3936027$$
$$B = 2119{,}74 \quad +$$
$$\log \mu = 2122{,}1336027$$

oder μ ist eine Zahl mit 2123 Ziffern, so dass $\frac{1}{\mu}$ eine verschwindend kleine Zahl ist, oder es ist fast gewiss anzunehmen, dass eine Ursache während der 10 Jahre existierte, die die Knabengeburten begünstigte.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 211. Man hat 11 Urnen, es enthält

die 1te	0	weisse,	10	schwarze	Kugeln
„ 2 „	1	„	9	„	„
„ 3 „	2	„	8	„	„
„ 4 „	3	„	7	„	„
„ 5 „	4	„	6	„	„
„ 6 „	5	„	5	„	„
„ 7 „	6	„	4	„	„
„ 8 „	7	„	3	„	„
„ 9 „	8	„	2	„	„
„ 10 „	9	„	1	„	„
„ 11 „	10	„	0	„	„

Man hat blindlings aus einer Urne eine schwarze Kugel gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zug aus der Urne 6 geschah?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 195.

Aufgabe 212. Aus welcher Urne geschah der Zug am wahrscheinlichsten?

Aufgabe 213. Man zieht aus der obigen Urne 3 Kugeln auf einmal aus einer Urne, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zug aus der 5ten Urne geschah, wenn alle 3 Kugeln weiss sind?

Andeutung. Man beachte, dass der Zug der 3 Kugeln auf einmal geschah, dass also die Wahrscheinlichkeiten nach Aufgabe 24 zu berechnen sind.

Aufgabe 214. Man zieht aus einer der Urne, unbekannt welcher, 4 Kugeln auf einmal, von denen 1 weiss und 3 schwarz sind, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug aus der 11ten Urne geschah?

Aufgabe 215. Eine Urne enthält 5 Kugeln. Man hat nach einander 6 Züge gethan und hiebei sind 4 schwarze und 2 weisse Kugeln zum Vorschein gekommen. Welches ist die wahrscheinlichste Anzahl weisser und schwarzer Kugeln, die die Urne enthält?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 197.

Aufgabe 216. Eine Urne enthält 20 Kugeln. Man zieht aus ihr 3 Kugeln auf einmal und findet, dass man 2 weisse und 1 schwarze Kugel gezogen hat. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Urne 15 weisse und 5 schwarze Kugeln enthalten sind.

Andeutung. Die Lösung geschieht analog der Aufgabe 199.

Aufgabe 217. Eine Urne U_1 enthält 15 weisse und 5 schwarze Kugeln, eine andere U_2 enthält 10 weisse und 20 schwarze Kugeln. Man zieht blindlings aus einer der Urnen 16 Kugeln auf einmal heraus und findet, dass unter ihnen 12 weisse und 4 schwarze sind. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zug aus der ersten Urne U_1 geschah?

Andeutung. Vergleiche hiezu die Aufgabe 200.

Aufgabe 218. Von drei Urnen enthält

U_1 . . . 10 weisse, 20 schwarze
U_2 . . . 15 „ 25 „
U_3 . . . 20 „ 10 „

Kugeln. Man zieht blindlings aus einer der Urnen 8 Kugeln und findet, dass man 5 weisse und 3 schwarze Kugeln gezogen hat, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zug aus U_2 geschah?

Aufgabe 219. Eine Urne enthält 4 Kugeln, weisse und schwarze. Man zieht aus derselben 2 Kugeln und wirft sie in eine zweite Urne, von der man weiss, dass sie 4 weisse und 3 schwarze Kugeln enthält. Nun wird aus der zweiten Urne eine weisse Kugel gezogen, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Urne 2 weisse und 2 schwarze Kugeln enthält?

Andeutung. Vergleiche hiezu die Lösung der Aufgabe 201.

Aufgabe 220. Eine Urne enthält 3 weisse und 2 schwarze Kugeln. Man zieht 3 Kugeln auf einmal und wirft sie in eine zweite Urne, die 2 weisse und 3 schwarze Kugeln enthält. Aus dieser werden 2 Kugeln auf einmal gezogen, die beide weiss sind. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den zuerst gezogenen 3 Kugeln 2 weisse und 1 schwarze sich befinden?

Aufgabe 221. Eine Urne enthält 6 Kugeln, schwarze und weisse. Man wirft in dieselbe noch 10 weisse und 10 schwarze Kugeln und zieht sodann 4 Kugeln auf einmal heraus, von denen sich 3 weiss und 1 schwarz erweisen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Urne 4 weisse und 2 schwarze Kugeln enthielt?

Andeutung. Vergleiche die allgemeine Lösung in Aufgabe 202.

Aufgabe 222. Welches ist die wahrscheinlichste Annahme über die Anzahl weisser und schwarzer Kugeln in der Aufgabe 221?

Aufgabe 223. Eine Urne enthält 4 Kugeln, schwarze und weisse. Man wirft zu diesen noch 5 weisse und 5 schwarze Kugeln und zieht nach einander 4 Kugeln heraus, die gezogene Kugel wird wieder zurückgelegt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Urne 3 weisse und 1 schwarze Kugel enthält, wenn von den 4 zuletzt gezogenen Kugeln 3 weiss und 1 schwarz waren?

Andeutung. Die Lösung geschieht wie Aufgabe 202 nur muss beachtet werden, dass die gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird, dass also Formel 8 zu benützen ist.

Aufgabe 224. Welches ist in Aufgabe 223 die wahrscheinlichste Kombination von weissen und schwarzen Kugeln in der Urne vor dem Einwurf der anderen Kugeln?

Aufgabe 225. Eine Urne enthält eine unbekannte Anzahl weisser und schwarzer Kugeln. Es werden 1000 Züge gemacht, wobei die Kugel stets wieder zurückgelegt wird und hiebei 572 weisse und 428 schwarze Kugeln gezogen, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Urne mehr weisse als schwarze Kugeln enthält?

Andeutung. Man benütze die Formel 38, aber nicht 38'.

Aufgabe 226. Aus einer Urne werden 6000 Züge gemacht, wobei die Kugel wieder zurückgelegt wird. Man hat hiebei 3854 weisse und 2146 schwarze Kugeln gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Urne mehr weisse als schwarze Kugeln sind?

Andeutung. Man benütze die Formel 38 und 38'.

Aufgabe 227. Innerhalb eines Zeitraumes von 40 Jahren wurden in Paris 393386 Knaben und 377555 Mädchen geboren. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Ursache die Knabengeburt begünstigte?

Andeutung. Man benütze Formel 38 und 38'.

Aufgabe 228. Mit einer Münze werden 4000 Würfe gemacht. Hiebei erscheint 2136 mal Wappen und 1864 mal Schrift. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Münze leichter mit Wappen als Schrift auffällt?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 209.

Aufgabe 229. Eine Urne enthält höchstens 5 und wenigstens 3 Kugeln. Bei einer vorgenommenen Ziehung ist eine weisse Kugel zum Vorschein gekommen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Urne die Anzahl weisser Kugeln sich zu der Anzahl schwarzer Kugeln verhalten wie 2 : 1.

Andeutung. Man muss die Wahrscheinlichkeiten für alle zulässigen Fälle der Anzahl Kugeln von 3 bis 5 berechnen, die sich für das Ziehen einer weissen Kugel ergeben.

Also vorerst unter der Annahme, dass die Urne 3 Kugeln also

1) 3 weisse 0 schwarze
2) 2 „ 1 „
3) 1 „ 2 „ Kugeln

enthält. Hiebei ist der Fall 2) derjenige, für den die Wahrscheinlichkeit gesucht werden soll. Dann macht man die Ausnahme, dass die Urne 4 Kugeln, sodann 5 Kugeln enthält. Hat man alle die Wahrscheinlichkeiten berechnet, so verfährt man nach Formel 30.

C. Über die Wahrscheinlichkeit eines künftigen Ereignisses.

Frage 50. Ein Ereignis ist unter $(m+n)$ Versuchen m-mal eingetreten, wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis beim nächsten Versuche eintritt?

Antwort. Da uns die Ursache des Eintrittes des Ereignisses vollständig unbekannt ist, so machen wir die Hypothese, die Wahrscheinlichkeit, welche die unbekannte Ursache dem Eintreffen des Ereignisses erteilt, sei x. Dann ist die Wahrscheinlichkeit p, dass das Ereignis bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eintritt nach Formel 8

$$p = \binom{m+n}{m} x^m(1-x)^n$$

Ist nun das Ereignis bei $(m+n)$ Versuchen thatsächlich m-mal eingetreten, so ist die Wahrscheinlichkeit unserer Hypothese x nach dem Satze von Bayes Formel 31:

$$w = \frac{x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n}$$

wenn man $\binom{m+n}{m}$ im Zähler und Nenner kürzt.

Lassen wir nun die Hypothese x auch für den nächsten Versuch bestehen, so ist das Eintreffen des Ereignisses E zusammengesetzt aus dem Zusammentreffen der Hypothese x, wofür die Wahrscheinlichkeit w vorhanden ist, und aus dem Eintreffen des Ereignisses E. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Eventualitäten zusammentreffen, ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit der beiden einfachen Ereignisse, also ist nach Formel 5 diese Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

Nun kann das Ereignis E eintreten unter verschiedenen Ursachen, die ihm eine Wahrscheinlichkeit erteilen, die aller Werte zwischen 0 und 1 fähig ist, d. h. die Hypothese x kann alle Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen und bei jedem dieser Werte kann das Ereignis eintreten. Daher

ist die Wahrscheinlichkeit W, dass das Ereignis bei dem nächsten Versuche eintritt:

$$W = \int_0^1 x\, w = \int_0^1 \frac{x^{m+1}(1-x)^n\, dx}{\int_0^1 x^m (1-x)\, dx}$$

oder wenn der konstante Nenner vor das Integral gesetzt wird:

$$W = \frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\, dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx} \quad \ldots\ldots (1)$$

Die Gleichung (1) nimmt eine einfachere Form an, wenn man von der Formel g Gebrauch macht.

Es ergibt sich

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = J_{m,n} = \frac{m!\; n!}{(m+n+1)!}$$

und

$$\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\, dx = J_{m+1,n} = \frac{(m+1)!\; n!}{(m+n+2)!}$$

daher die Gleichung (1) in

$$W = \frac{(m+1)!\; n!}{(m+n+2)!} \cdot \frac{(m+n+1)!}{m!\; n!}$$

$$= \frac{(m+1)!\; (m+n+1)!}{m!\; (m+n+2)!}$$

übergeht, und wenn die Faktoriellen gekürzt werden, erhält man

Formel 39: $W = \dfrac{m+1}{m+n+2}$

die verlangte Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis im nächsten Versuche eintritt, nachdem es in $m+n$ Versuchen bereits m-mal eingetreten ist.

Anmerkung 44. Die Formel 39 kann so gedeutet werden: Hat man $(m+n)$ Versuche gemacht, in denen das Ereignis m mal eintrat, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis im nächsten Versuche wieder eintritt, gleich der Wahrscheinlichkeit, mit welcher man aus einer Urne, die $(m+1)$ weisse und $(n+1)$ schwarze Kugeln enthält, eine weisse Kugel zieht. Da

$$w' = \frac{m}{m+n}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ist, aus einer Urne, die m weisse und n schwarze Kugeln

enthält, eine weisse Kugel zu ziehen, so hat man folgende Regel für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses im nächsten Versuch, wenn es bereits in früheren Versuchen eingetreten ist:

Ist das Ereignis bei $(m+n)$ Versuchen m mal eingetreten, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im nächsten Versuche wieder eintritt, gleich der Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weissen Kugel aus einer Urne, die m weisse und n schwarze Kugeln enthält, nachdem man zuvor noch eine schwarze und eine weisse Kugel in die Urne gelegt hat.

Frage 51. Ein Ereignis, dessen Ursache unbekannt ist, ist bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eingetreten, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es bei s weiteren Versuchen $(s-r)$-mal eintritt, also r-mal nicht eintritt?

Antwort. Sei wieder x die Hypothese, dann ist die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese nachdem das Ereignis bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eintrat:

$$w = \frac{x^m (1-x)^n \, dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei s Versuchen $(s-r)$-mal eintritt und r-mal nicht eintritt, ist nach Formel 8

$$p = \binom{s}{r} x^{s-r} (1-x)^r .$$

Die Wahrscheinlichkeit also, dass bei unserer Hypotese x das Ereignis $(s-r)$-mal eintritt, ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit aus den beiden Ereignissen, dass zuerst unsere Hypothese x statthat, und dass, wenn sie stattfindet, das Ereignis $(s-r)$-mal eintritt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis unter Annahme der Hypothese x bei s Versuchen $(s-r)$-mal eintritt nach Formel 5

$$w \, . \, p = \binom{s}{r} \frac{x^{m+s-r} (1-x)^{n+r} \, dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n}$$

Nun ist x aller Werte zwischen 0 und 1 fähig, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $w \, . \, p$, d. h. es ist

$$W = \binom{s}{r} \frac{\int_0^1 x^{m+s-r} (1-x)^{n+r} \, dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n}$$

oder wenn wir die in Formel g eingeführte Bezeichnung verwenden:

Formel 40: $W = \binom{s}{r} \frac{J_{m+s-r,\, n+r}}{J_{m,\, n}}$

Frage 52. Ein Ereignis ist bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eingetreten, wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei weiteren s Versuchen wenigstens $(s-\nu)$-mal und höchstens $(s-k)$-mal eintritt?

Antwort. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei s Versuchen wenigstens $(s-\nu)$-mal und höchstens $(s-k)$-mal eintritt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Ereignis bei den s folgenden Versuchen:

$$s-\nu,\ s-\nu+1,\ s-\nu+2,\ \ldots\ldots\ s-\nu+(\nu-k) = s-k$$

mal eintritt. Da nach Formel 40 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis $(s-\nu+i)$-mal eintritt:

$$= \binom{s}{\nu-i} \frac{J_{m+s-\nu+i,\, n+\nu-i}}{J_{m,\, n}}$$

ist, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

Formel 41: $W = \frac{1}{J_{m,\, n}} \sum_{i=o}^{i=\nu-k} \binom{s}{\nu-i} J_{m+s-\nu+i,\, n+\nu-i}$

Frage 53. Welche Relation besteht zwischen den verschiedenen Werten $J_{m+s-r,\, n+r}$ und wie veranschaulicht man dieselbe?

Antwort. Da bei den s folgenden Versuchen das Ereignis entweder 0, 1, 2, ... s-mal eintreten muss, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei den folgenden s Versuchen wenigstens 0-mal und höchstens s-mal eintritt gleich der Einheit, daher liefert die Formel 41 die Relation:

$$1 = \frac{1}{J_{m,\, n}} \sum_{i=o}^{i=s} \binom{s}{i} J_{m+i,\, n+s-i}$$

wenn $\nu = s$ und $k = o$ gesetzt wird.

Denkt man sich die Werte

$$y_i = \frac{\binom{s}{i} J_{m+i,\, n+s-i}}{J_{m,\, n}}$$

als Ordination aufgetragen in den Punkten,

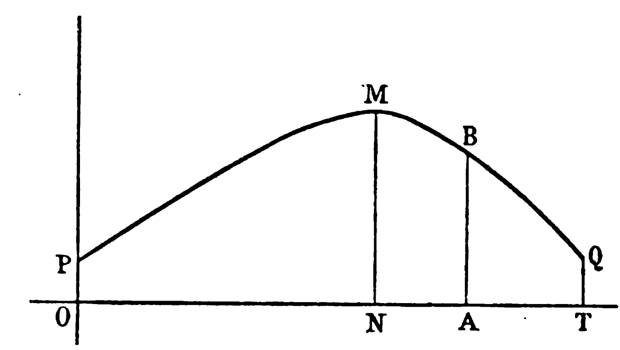
deren Abszissen i sind, so erhält man $(s+1)$ Punkte in der Ebene, die in ihrer Aufeinanderfolge durch eine Curve verbunden werden sollen. Diese Curve zeigt bei wachsendem m und n ein ganz analoges Verhalten wie diejenige, welche wir bei der Entwicklung von $(p+q)\ s$ erhalten haben, wobei p die Wahrscheinlichkeit a priori des Ereignisses war. Die einzelnen Terme, die daselbst auftraten, von der Form

$$\binom{s}{i} p^{m-i} q^i$$

werden hier bei der a posteriori berechneten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ersetzt durch

$$y_i = \binom{s}{i} \frac{J_{m+i,\, n+s-i}}{J_{m,\, n}}$$

Figur 19.



Die Curve verlauft etwa in der Form wie Figur 19 zeigt, wobei

$$OT = s,\ OA = i,\ AB = y$$

ist. Auch hier ergibt sich ein grösster Wert von y_i, wie früher in der Antwort auf Frage 15. Denn es ist, wenn man die Werte der $J_{m+i,\, n+s-i}$ nach Formel g ersetzt:

$$y_i = \frac{s!}{i!\,(s-i)!} \cdot \frac{(m+i)!\,(n+s-i)!}{(m+n+s+1)!} \cdot \frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}$$

$$y_{i+1} = \frac{s!}{(i+1)!\,(s-i-1)!} \cdot \frac{(m+i+1)!\,(n+s-i-1)!}{(m+n+s+1)!} \cdot \frac{(m+n+1)!}{m!\,n!}$$

also

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{s-i}{i+1} \cdot \frac{m+i+1}{n+s-i}$$

oder es ist

$$y_{i+1} \gtreqless y_i$$

je nachdem

$$(s-i)\,(m+i+1) \gtreqless (i+1)\,(n+s-i)$$

oder

$$s\,m - n \gtreqless i\,(m+n)$$



ist. Für den grössten Term ergibt sich also

$$i = \left[\frac{s\,m - n}{m + n} \right]$$

wenn, die [ ] anzeigen, dass die grösste ganze in dem Ausdruck enthaltene Zahl genommen werden soll.

Gelöste Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse.

Aufgabe 230. Ein Ereignis ist m mal beobachtet worden, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass es bei s weiteren Beobachtungen s mal eintritt?

Auflösung. Wir benützen die Formel 40

$$W = \binom{s}{r} \frac{J_{m+s-r,\, n+r}}{J_{m,\, n}}$$

und haben in derselben $n = o$, $r = o$ zu setzen, da nur das Eintreffen des Ereignisses beobachtet wurde. Wir erhalten dann:

$$W = \frac{J_{m+s,\, o}}{J_{m,\, o}}$$

und da nach Formel

$$J_{m,\, o} = \frac{1}{m+1}$$

$$J_{m+s,\, o} = \frac{1}{m+s+1}$$

ist, so wird

$$W = \frac{m+1}{m+s+1}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also dieselbe, als wenn wir in eine Urne, die m weisse Kugeln enthält, noch 1 weisse und s schwarze Kugeln legen und nach der Wahrscheinlichkeit fragen, aus der Urne eine weisse Kugel zu ziehen.

Aufgabe 231. Angenommen, der Sonnenaufgang wird seit 6000 Jahren täglich beobachtet, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne noch den nächsten Tag aufgehen wird?

Auflösung. Wir benützen die Formel 39

$$W' = \frac{m+1}{m+n+2}$$

in der wir $n = o$ setzen, dann wird

$$m = 2191500$$

zu setzen sein, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = 1 - \frac{1}{2191502}$$

daher von der Einheit nun weniger als $\frac{1}{2191502}$ $= 0{,}0000005$ verschieden.

Aufgabe 232. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne in 4000 Jahren noch aufgehen wird?

Auflösung. Benützen wir die in Aufgabe 230 abgeleitete Formel

$$W = \frac{m+1}{m+s+1} = 1 - \frac{s}{m+s+1}$$

so haben wir wieder

$$m = 2191500$$

und

$$s = 1461000$$

zu setzen und erhalten

$$W = 1 - \frac{1461000}{3652501}$$

so dass die Wahrscheinlichkeit nicht mehr ganz $\frac{2}{3}$ ist.

Aufgabe 233. Aus einer Urne wurden 10 Kugeln gezogen, die stets wieder zurückgelegt wurden. Es erschienen hiebei 7 weisse und 3 schwarze Kugeln. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 4 weiteren Zügen 3 weisse und 1 schwarze Kugel erscheinen?

Auflösung. Man benützt die Formel 40, welche

für $s = 4, \quad r = 1$

und $m = 7, \quad n = 3$

$$W = \binom{4}{1} \frac{J_{10,\,7}}{J_{7,\,3}}$$

liefert.

Nun ist

$$J_{10,\,4} = \frac{10!\;4!}{15!}$$

$$J_{7,\,3} = \frac{7!\;3!}{11!}$$

also

$$\frac{J_{10,\,4}}{J_{7,\,3}} = \frac{11!}{15!} \cdot \frac{10!\;4!}{7!\;3!} = \frac{10.9.8}{15.14.13.1}$$

also ist

$$W = \frac{4.10.9.8}{15.14.13.12} = \frac{8}{91}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

841. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Dritter Teil.
Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.
Forts. v. Heft 840. — Seite 209—224.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach System Kleyer bearbeitet von Dr. Karl Bobek.

Fortsetzung v. Heft 840. — Seite 209—224.

Inhalt:

Gelöste Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse.

Stuttgart 1890.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen zu lösen haben**, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten**. Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergess mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Ber zweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft** verleihen — somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** g

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Na verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfa Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird deren Erle thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlu**

Aufgabe 234. Aus einer Urne werden 20 weisse und 10 schwarze Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel zurückgelegt wird. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 15 folgenden Zügen wenigstens eine weisse Kugel erscheint?

Auflösung. Nach Formel 41 ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei s Versuchen das Ereignis wenigstens einmal eintritt,

$$W = \frac{1}{J_{m,n}} \sum_{i=o}^{i=s-1} \binom{s}{s-i-1} J_{m+1+i,\ n+s-i-1}$$

indem man $s-1=\nu$ und $s-k=s$ setzt. Macht man von der in der Antwort auf Frage 53 abgeleiteten Relation

$$1 = \frac{1}{J_{m,n}} \sum_{k=o}^{k=s} \binom{s}{k} J_{m+k,\ n+s-k}$$

Gebrauch, so ergibt sich die verlangte Wahrscheinlichkeit

Formel 42: $W = 1 - \frac{J_{m,\ n+s}}{J_{m,\ n}}$

welcher Wert sich auch aus der Bemerkung ergibt, dass

$$\frac{J_{m,\ n+s}}{J_{m,\ n}}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass bei den s folgenden Zügen nur schwarze Kugeln erscheinen. (Vgl. Formel 40 für $s=r$).

Für die vorstehende Aufgabe wird

$$m = 20,\ n = 10,\ s = 15$$

und da

$$J_{20,25} = \frac{20!\ 25!}{46!}$$

$$J_{20,10} = \frac{20!\ 10!}{31!}$$

ist, so folgt

$$\frac{J_{20,\ 25}}{J_{20,\ 10}} = \frac{31!}{46!} \cdot \frac{20!\ 25!}{20!\ 10!} = \frac{25!\ 31!}{46!\ 10!}$$

$$= 0{,}000063876$$

mithin

$$W = 0{,}999936124$$

Nebenrechnung:

$$\frac{25!\ 31!}{46!\ 10!} = \frac{11 . 12 \ldots\ldots 25}{32 . 33 \ldots\ldots 46} = \frac{Z}{N}$$

$$\left.\begin{aligned} \log Z &= 19{,}1308826 \\ \log N &= 23{,}3255479 \end{aligned}\right\} -$$

$$0{,}8053347 - 5$$

$$\frac{Z}{N} = 0{,}000063876$$

Aufgabe 235. Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln in der Anzahl n, bei einer vorgenommenen Ziehung kam 1 weisse Kugel zum Vorscheine, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem nächsten Zuge wieder eine weisse Kugel erscheint, wenn die zuerst gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird?

Auflösung. Die Urne kann enthalten:

1 weisse und $n-1$ schwarze
2 „ „ $n-2$ „
3 „ „ $n-3$ „
⋮
n „ „ 0 „ Kugeln.

Diesen einzelnen Hypothesen entsprechend

wird dann die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel nach Formel 1 sein:

$$p_1 = \frac{1}{n} \quad p_2 = \frac{2}{n} \ldots p_k = \frac{k}{n} \ldots p_n = \frac{n}{n}$$

und die Wahrscheinlichkeit der Annahme, dass die Urne k weisse Kugeln enthält, ist nach Aufgabe 198

$$w_k = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

Unter der Annahme, dass die Urne k weisse Kugeln enthält, ist

$$p_k = \frac{k}{n}$$

die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel, daher ist

$$w_k p_k = \frac{2k}{n(n+1)} \cdot \frac{k}{n}$$

die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses, dass sowohl die Annahme, k weisse Kugeln, als das Ziehen einer weissen Kugel, statthat.

Nun kann eine weisse Kugel gezogen werden unter den Annahmen, dass die Urne entweder 1 oder 2 oder 3 oder $k \ldots$ oder n weisse Kugeln enthält, diesen zusammengesetzten Ereignissen entsprechen die Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
w_1 p_1 &= \frac{2 \cdot 1^2}{n^2(n+1)} \\
w_2 p_2 &= \frac{2 \cdot 2^2}{n^2(n+1)} \\
w_3 p_3 &= \frac{2 \cdot 3^2}{n^2(n+1)} \\
&\vdots \\
w_k p_k &= \frac{2 \cdot k^2}{n^2(n+1)} \\
&\vdots \\
w_n p_n &= \frac{2 \cdot n^2}{n^2(n+1)}
\end{aligned}$$

und daher ist nach Formel 3′ die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{2}{n^2(n+1)} \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots + n^2\}$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

oder

$$W = \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$$

Je grösser also die Anzahl der Kugeln ist,

Erkl. 57. Es ist die Summe

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

was aus der Theorie der arithmetischen Reihen höherer Ordnung folgt, vergleiche Kleyers Lehrbuch über arithmetische und geometrische Progressionen.

desto näher wird der Wert der Wahrscheinlichkeit an $\frac{2}{3}$ kommen. Für $n = \infty$ wird $W = \frac{2}{3}$, was auch direkt folgt, wie die nächste Aufgabe zeigt.

Aufgabe 236. Eine Urne enthält eine unendlich grosse Anzahl von Kugeln, bei einem Zuge wurde eine weisse Kugel gezogen, welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem nächsten Zuge wieder eine weisse Kugel erscheint?

Erkl. 58. Hier ist nicht nötig, dass die Kugel wieder zurückgelegt wird, da die Anzahl nicht vermindert wird. Wenn es auch unmöglich ist, eine Urne mit unendlich vielen Kugeln zu haben, so kann man sich wohl vorstellen, dass diese unendlich vielen Kugeln das Eintreffen oder Nichteintreffen eines Naturereignisses darstellen sollen.

Auflösung. Es sei x die unbekannte Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel, wobei x alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Dann ist nach Formel 31

$$w = \frac{x\,dx}{\int_0^1 x\,dx}$$

die Wahrscheinlichkeit der Hypothese x und daher

$$wx = \frac{x^2\,dx}{\int_0^1 x\,dx}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Hypothese bei dem nächsten Zuge wieder eine weisse Kugel erscheint. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit im nächsten Zuge eine weisse Kugel zu ziehen nach Formel 35

$$W = \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{\int_0^1 x\,dx}$$

oder

$$W = \frac{2}{3}$$

Diesen Wert von W liefert auch ohne weiteres Formel 39 für $m = 1$ und $n = 0$.

Aufgabe 237. Eine Urne enthält n Kugeln, man zieht eine weisse Kugel, legt dieselbe aber nicht wieder zurück. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Zuge wieder eine weisse Kugel erscheint?

Auflösung. Unter der Annahme, dass die Urne k weisse Kugeln enthält, ist, nachdem eine weisse Kugel gezogen wurde:

$$\omega_k = \frac{k-1}{n-1}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass auch im nächsten Zuge eine weisse Kugel erscheint; weil die weisse Kugel, die bereits gezogen wurde, nicht zurückgelegt wird. Da nun

Erkl. 59. Es ist

$$\sum_{k=1}^{k=n} k\,(k-1) = \sum_{1}^{n} k^2 - \sum_{1}^{k} k$$

$$= \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

nach den Erklärungen 57 u. 10, also reduziert:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k\,(k-1) = \frac{1}{3}\,n\,(n^2-1)$$

$$w_k = \frac{2k}{n\,(n+1)}$$

die Wahrscheinlichkeit für diese Annahme ist (nach Aufgabe 198), so ist

$$w_k\,\omega_k = \frac{2\,k\,(k-1)}{n\,(n+1)\,(n-1)}$$

die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beider Ereignisse. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = w_1\,\omega_1 + w_2\,\omega_2 + \ldots\ldots + w_n\,\omega_n$$

$$= \frac{2}{n\,(n^2-1)}\Big\{0 + 2\,.\,1 + 3\,.\,2 + .\ + k\,(k-1) + \ldots + n\,(n-1)\Big\}$$

$$= \frac{2}{n\,(n^2-1)} \cdot \frac{1}{3}\,n\,(n^2-1)$$

also

$$W = \frac{2}{3}$$

unabhängig von der Anzahl Kugeln, welche die Urne enthält.

Aufgabe 238. Eine Urne enthält höchstens 4 Kugeln. Man hat n Ziehungen gemacht und hiebei $(n-k)$ weisse und $k > o$ schwarze Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel stets zurückgelegt wurde. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem nächsten Zuge wieder eine weisse Kugel erscheint?

Auflösung. Da schwarze und weisse Kugeln gezogen wurden, so kann die Urne enthalten:

a) Zwei Kugeln und zwar:

1 weisse und 1 schwarze.

b) Drei Kugeln und zwar:

1) 1 weisse, 2 schwarze
2) 2 „ 1 „

c) Vier Kugeln und zwar:

1) 1 weisse, 3 schwarze
2) 2 „ 2 „
3) 3 „ 1 „

Bezeichnet man die diesen Annahmen der Reihe nach entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weissen Kugel mit p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten mit q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, so ist:

$$p_1 = \frac{1}{2} \qquad q_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = \frac{1}{3} \qquad q_2 = \frac{2}{3}$$

$$p_3 = \frac{2}{3} \qquad q_3 = \frac{1}{3}$$

$$p_4 = \frac{1}{4} \qquad q_4 = \frac{3}{4}$$

$$p_5 = \frac{2}{4} \qquad q_5 = \frac{2}{4}$$

$$p_6 = \frac{3}{4} \qquad q_6 = \frac{1}{4}$$

Nun wurden n Ziehungen vollführt, bei denen $(n - k)$ weisse und k schwarze Kugeln erschienen. Unter Voraussetzung der obigen Annahmen werden die Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 für das Ziehen von $(n - k)$ weissen und k schwarzen Kugeln:

$$w_1 = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$w_2 = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$w_3 = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$w_4 = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$w_5 = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{2}{4}\right)^k$$

$$w_6 = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

sein.

Mithin werden nach Formel 30 die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Annahmen: W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6 sich ergeben:

$$W_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k}{P}$$

$$W_2 = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k}{P}$$

$$W_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k}{P}$$

$$W_4 = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k}{P}$$

$$W_5 = \frac{\left(\frac{2}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{2}{4}\right)^k}{P}$$

$$W_6 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} \left(\frac{1}{4}\right)^k}{P}$$

wobei

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} + \left(\frac{2}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{4}\right)^{k}$$
$$+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$$
$$= \frac{1}{2^n\, 3^n\, 4^n}\left(3^n 4^n + 2^{n+k} 4^n + 2^{2n-k} 4^n + 2^n 3^{n+k} + 2^{2n} 3^n + 2^n 3^{2n-k}\right)$$
$$= \frac{1}{2^n\, 3^n\, 4^n}\left(2^{2n+1} 3^n + 2^{3n+k} + 2^{4n-k} + 2^n 3^{n+k} + 2^n 3^{2n-k}\right)$$

ist.

Für den nächsten Zug ist irgend eine der Annahmen zulässig, daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Zuge eine weisse Kugel erscheint

$$W = p_1\, W_1 + p_2\, W_2 + p_3\, W_3 + p_4\, W_4 + p_5\, W_5 + p_6\, W_6$$

also ist

$$P\, W = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$$
$$+ \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{4}\right)^{k} + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}\, 3^{n+1}\, 4^{n+1}}\Big[3^{n+1} 4^{n+1} + 2^k 2^{n+1} 4^{n+1} + 2^{n-k+1} 2^{n+1} 4^{n+1} + 3^k 2^{n+1} 3^{n+1}$$
$$+ 2^{n+1} 2^{n+1} 3^{n+1} + 3^{n-k+1} 2^{n+1} 3^{n+1}\Big]$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}\, 3^{n+1}\, 4^{n+1}}\left[2^{2n+3} 3^{n+1} + 2^{3n+k+2} + 2^{4n-k+3} + 2^{n+1} 3^{n+k+1} + 2^{n+1} 3^{2n-k+2}\right]$$

und mit Rücksicht auf den Wert von P:

$$W = \frac{2^{2n+3}\, 3^{n+1} + 2^{3n+k+2} + 2^{4n-k+3} + 2^{n+1}\, 3^{n+k+1} + 2^{n+1}\, 3^{2n-k+2}}{2.3.4.\left[2^{2n+1}\, 3^n + 2^{3n+k} + 2^{4n-k+} + 2^n\, 3^{n+k} + 2^n\, 3^{2n-k}\right]}.$$

Kürzt man noch Zähler und Nenner mit 2^{n+1}, so wird

$$W = \frac{2^{n+2}\, 3^{n+1} + 2^{2n+k+1} + 2^{3n-k+2} + 3^{n+k+1} + 3^{2n-k+2}}{3.4\left[2^{n+1}\, 3^n + 2^{2n+k} + 2^{3n-k} + 3^{n+k} + 3^{2n-k}\right]}$$

Anmerkung 45. Wäre $k = o$, so müsste man auch die Annahme zulassen, dass die Urne lauter weisse Kugeln enthält. Zu den Fällen *sub* a) b) c) käme noch dieser Fall hinzu.

Aufgabe 239. Zwei Spieler A und B spielen eine Partie um den Einsatz G, welchen der Spieler einzieht, der zuerst n Partien gewonnen hat. Sie sind gezwungen das Spiel abzubrechen, nachdem A schon a, und B b Partien gewonnen hat. Wie sollen die Spieler den Einsatz teilen?

Auflösung. Es sei x die Wahrscheinlichkeit, dass A eine Partie gewinnt, also $(1 - x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass B diese Partie gewinnt, so kann x alle Werte zwischen 0

und 1 annehmen. Die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese x ist, da A schon a und B b Partien gewonnen hat, nach Formel 31

$$w = \frac{x^a (1-x)^b \, dx}{\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx}$$

oder

$$w = \frac{1}{J_{a,\,b}} \; x^a (1-x)^b \, dx$$

wenn nach früherem

$$J_{a,\,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx = \frac{a!\, b!}{(a+b+1)!}$$

gesetzt wird.

Nun hat aber A noch $n-a$ und B noch $n-b$ Partien zu gewinnen, um den Einsatz ganz einziehen zu können. Brechen sie das Spiel ab, so müssen sie den Einsatz der Wahrscheinlichkeit entsprechend, die sie haben, den Einsatz zu gewinnen, teilen.

Unter der Hypothese x besitzt A die Wahrscheinlichkeit ω das Spiel zu gewinnen, wobei sich ω nach Aufgabe 76 ergibt:

$$\omega = x^{n-a} \left[1 + \binom{n-a}{1} (1-x) + \binom{n-a+1}{2} (1-x)^2 + \ldots + \binom{2n-a-b-2}{n-b-1} (1-x)^{n-b-1}\right]$$

daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass A den Einsatz gewinnt und dass die Hypothese x stattfindet:

$$w\,\omega = \frac{1}{J_{a,\,b}} \; x^n (1-x)^b \, dx \left[1 + \binom{n-a}{1} (1-x) + \ldots \binom{2n-a-b-2}{n-b-1} (1-x)^{n-b-1}\right],$$

und da x alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, so ist die Wahrscheinlichkeit W, dass A das Spiel gewinnt:

$$W = \frac{1}{J_{a,\,b}} \int_0^1 x^n (1-x)^b \, dx \left[1 + \binom{n-a}{1} (1-x) + \ldots + \binom{2n-a-b-2}{n-b-1} (1-x)^{n-b-1}\right]$$

oder wenn die Integration ausgeführt wird:

$$W = \frac{1}{J_{a,\,b}} \left[J_{n,\,b} + \binom{n-a}{1} J_{n,\,b+1} + \binom{n-a+1}{2} J_{n,\,b+2} + \ldots \binom{2n-a-b-2}{n-b-1} J_{n,\,n-1}\right]$$

Es erhält also A von dem Einsatze WG und B den Rest $(1-W)\,G$.

Aufgabe 240. Bei einer sehr grossen Anzahl $d = a + b$ Versuchen ist ein Ereignis a mal eingetreten. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei $s = m + n$ folgenden Versuchen das Ereignis m mal eintritt?

Auflösung. Die Formel 40 liefert die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \binom{s}{n} \frac{J_{a+m,\; b+n}}{J_{a,\,b}}$$

wenn man an Stelle von m und n setzt a und b und $s - r = m$, also $r = n$ annimmt.

Nach Formel g ist

$$J_{a+m,\, b+n} = \frac{(a+m)!\,(b+n)!}{(a+b+m+n+1)!}$$

$$J_{a,\,b} = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$$

also ergibt sich

$$W = \binom{s}{n} \frac{(a+m)!\,(b+n)!}{(a+b+m+n+1)!} \cdot \frac{(a+b+1)!}{a!\,b!}$$

und es handelt sich nun darum, diesen Ausdruck zur praktischen Rechnung vorzubereiten.

Hiezu benützen wir die Stirlingsche Formel f (vergleiche Anhang I), nach welcher folgt:

$$(a+b+1)! = (a+b+1)\,(a+b)^{a+b} e^{-a-b} \sqrt{2\pi\,(a+b)}$$

$$a! = a^a e^{-a} \sqrt{2\pi\, a}$$

$$b! = b^b e^{-b} \sqrt{2\pi\, b}$$

$$(a+b+m+n+1)! = (s+d+1)\,(s+d)^{s+d} e^{-s-d} \sqrt{2\pi\,(s+d)}$$

$$(m+a)! = (m+a)^{m+a} e^{-m-a} \sqrt{2\pi\,(m+a)}$$

$$(n+b)! = (n+b)^{n+b} e^{-n-b} \sqrt{2\pi\,(n+b)}$$

$$\binom{s}{n} = \frac{s!}{m!\,n!} = \frac{s^s e^{-s} \sqrt{2\pi\, s}}{m^m n^n e^{-m} e^{-n} \sqrt{2\pi\, m}\;\sqrt{2\pi\, n}}$$

und daher

$$W = \frac{s^s \sqrt{s}}{m^m\, n^n \sqrt{2\pi\, m\, n}} \cdot \frac{(m+a)^{m+a} (n+b)^{n+b} \sqrt{2\pi\,(m+a)\,(n+b)}}{(s+d+1)\,(s+d)^{s+d} \sqrt{s+d}} \cdot \frac{(d+1)\, d^d \sqrt{d}}{a^a\, b^b \sqrt{2\pi\, b\, a}}$$

Nun kann man an Stelle von $s+d+1$ und $d+1$ setzen $s+d$ resp. d, wenn man 1 gegen die grossen Zahlen $s+d$ und d vernachlässigt. Dadurch übergeht die obige Gleichung in

Formel 43: $$W = \frac{s^s\, d^d\, (m+a)^{m+a} (n+b)^{n+b}}{m^m\, n^n (s+d)^{s+d}\, a^a\, b^b} \cdot \sqrt{\frac{s\, d^3\, (m+a)\,(n+b)}{2\pi\, m\, n\, a\, b\, (s+d)^3}}$$

Wir multiplicieren in dem Faktor vor der Wurzel Zähler und Nenner mit 2^{s+d}, so wird

$$W = \left(\frac{s}{2m}\right)^m \left(\frac{s}{2n}\right)^n \cdot \left(\frac{d}{2a}\right)^a \left(\frac{d}{2b}\right)^b \left(\frac{2(m+a)}{s+d}\right)^{m+a} \left(\frac{2(n+b)}{s+d}\right)^{n+b} \cdot \sqrt{\frac{s\, d^3\, (m+a)\,(n+b)}{2\pi\, m\, n\, a\, b\, (s+d)^3}}$$

also ist:

Formel 43a: $$\log W = 0{,}43429448\; l\, A + \log \sqrt{\frac{s\, d^3\, (m+a)\,(n+b)}{2\pi\, m\, n\, a\, b\, (s+d)^3}}$$

wobei $l\,A$ der natürliche Logarithmus ist, so dass

$$l\,(1+z) = z - \frac{1}{2}\,z^2 + \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{1}{4}\,z^4 + \ldots$$

gesetzt werden kann.

Erkl. 60. Wegen des Faktors 0,43429448 $= \log e$ vergleiche Kleyers Lehrbuch der Logarithmen.

Setzt man $m - n = \sigma$, $a - b = \delta$, so wird

$$l\left(\frac{s}{2\,m}\right)^m = -m\,l\left(\frac{2\,m}{s}\right) = -m\,l\left(1 + \frac{\sigma}{s}\right)$$

und es ergibt sich:

$$l\left(\frac{s}{2\,m}\right)^m = -m\left[\frac{\sigma}{s} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$l\left(\frac{s}{2\,n}\right)^n = +n\left[\frac{\sigma}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 + \cdots\right]$$

oder

$$l\left(\frac{s}{2\,m}\right)^m\left(\frac{s}{2\,n}\right)^n = -s\left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 + \frac{1}{5.6}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^6 + \cdots\right]$$

und analog:

$$l\left(\frac{d}{2\,a}\right)^a\left(\frac{d}{2\,b}\right)^b = -d\left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{\delta}{d}\right)^4 + \frac{1}{5.6}\left(\frac{\delta}{d}\right)^6 + \cdots\right]$$

$$l\left(\frac{2\,(m+a)}{s+d}\right)^{m+a}\left(\frac{2\,(n+b)}{s+d}\right)^{n+b} = (s+d)\left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 + \cdots\right]$$

mithin folgt durch Addition dieser drei letzten Gleichungen:

$$\textbf{Formel 43b:}\quad l\,A = (s+d)\left[\frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4}{3.4} + \frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^6}{5.6} + \ldots\right]$$
$$-s\left[\frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4}{3.4} + \frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^6}{5.6} + \ldots\ldots\right]$$
$$-d\left[\frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^4}{3.4} + \frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^6}{5.6} + \ldots\ldots\right]$$

Aufgabe 241. Vom Beginn des Jahres 1827 bis Ende des Jahres 1836 wurden in Frankreich 9 656 135 Kinder geboren, darunter 4 981 566 Knaben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 1 000 000 folgender Geburten 515 968 Knabengeburten eintreten werden?

Auflösung. Nach vorhergehender Aufgabe ist, wenn W die verlangte Wahrscheinlichkeit ist

$$\log W = 0{,}43429448\;l\,A$$
$$+ \log\sqrt{\frac{s\,d^3\,(m+a)\,(n+b)}{2\,\pi\;m\,n\,a\,b\,(s+d)^3}}$$

und

$$l\,A = (s+d)\left(\frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4}{3.4} + \ldots\right)$$

$$-s\left(\frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4}{3.4}+\ldots\ldots\right)$$

$$-d\left(\frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^4}{3.4}+\ldots\ldots\right)$$

wobei

$$d = 9656135$$
$$a = 4981566$$
$$b = 4674569$$
$$\delta = 306997$$
$$s = 1000000$$
$$m = 515968$$
$$n = 484032$$
$$\sigma = 31936.$$

Berechnung von lA. Nach nebenstehender Rechnung ist:

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0{,}00050582$$

$$\frac{1}{3.4}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}00000009$$

so dass die höheren Potenzen vernachlässigt werden können.

Ebenso ergibt sich

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 = 0{,}00050995$$

$$\frac{1}{3.4}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}00000009$$

und

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}00050539$$

$$\frac{1}{3.4}\left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}00000009$$

Daher ist

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2+\frac{1}{3.4}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}00050591$$

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2+\frac{1}{3.4}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}00051004$$

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2+\frac{1}{3.4}\left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}00050548$$

und mithin ergibt sich

$$\begin{aligned} lA &= 10656135 \times 0{,}00050591 \\ &\quad -1000000 \times 0{,}00051004 \\ &\quad -9656135 \times 0{,}00050548 \\ &= 5391{,}046 - 510{,}04 - 4880{,}973 \\ &= 0{,}033 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\left.\begin{aligned}\log(\sigma+\delta) &= 5{,}5301138 \\ \log(s+d) &= 7{,}0275997\end{aligned}\right\}-$$
$$0{,}5025141-2$$

$$\log\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0{,}0050282-3$$

$$\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0{,}00101164$$

$$\log\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}0100564-6$$

$$\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}00000102$$

$$\left.\begin{aligned}\log \sigma &= 4{,}5042805 \\ \log s &= 6{,}0000000\end{aligned}\right\}-$$
$$0{,}5042805-2$$

$$\log\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 = 0{,}0085610-3$$

$$\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 = 0{,}00101991$$

$$\log\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}0171220-6$$

$$\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}00000100402$$

$$\left.\begin{aligned}\log \delta &= 5{,}4871341 \\ \log d &= 6{,}9848024\end{aligned}\right\}-$$
$$0{,}5023317-2$$

$$\log\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}0046634-3$$

$$\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}00101079$$

$$\log\left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}0093268-6$$

$$\left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}0000010217$$

also

$$0{,}43429 \; l \; A = 0{,}0143317$$

Der zweite Teil von log W berechnet sich nun direkt:

$$\begin{array}{lcr} \log \; s & = & 6{,}0000000 \\ \log \; d^s & = & 20{,}9544072 \\ \log \; (m+a) & = & 6{,}7401679 \\ \log \; (n+b) & = & 6{,}7125320 \\ \hline & & 40{,}4071071 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcr} \log \; 2 & = & 0{,}3010300 \\ \log \; \pi & = & 0{,}4971499 \\ \log \; m & = & 5{,}7126228 \\ \log \; n & = & 5{,}6848741 \\ \log \; a & = & 7{,}6973659 \\ \log \; b & = & 7{,}6697416 \\ \log \; (s+d)^s & = & 21{,}0827991 \\ \hline & & 46{,}6455825 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40{,}4071071 \\ 46{,}6455825 \end{array} \Big\} - $$
$$\overline{0{,}7615236-7}$$

$$\log \sqrt{} = 0{,}8807623-4$$

Daher folgt

$$\log W = 0{,}0143317 + 0{,}8807623-4$$
$$= 0{,}8950940 - 4$$

also

$$W = 0{,}0007854.$$

Aufgabe 242. Eine Münze wurde 1000-mal in die Höhe geworfen, wobei 592-mal Wappen und 408-mal Schrift auffiel. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 200 folgenden Würfen 110-mal Wappen und blos 90-mal Schrift geworfen wird?

Auflösung. Wir benützen die Formel 43 a) und b). Es ist

$$W = \frac{s^s \, d^d \, (m+a)^{m+a} \, (n+b)^{n+b}}{m^m \, n^n \, a^a \, b^b \, (s+d)^{s+d}} \sqrt{\frac{s \, d^s \, (m+a) \, (n+b)}{2\pi \; m \, n \, a \, b \, (s+d)^s}}$$

$$\log W = 0{,}43429448 \; l \; A + \log \sqrt{\frac{s \, d^s \, (m+a) \, (n+b)}{2\pi \; m \, n \, a \, b \, (s+d)^s}}$$

und

$$l \; A = (s+d) \left[\frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2}{1 \, . \, 2} + \frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4}{3 \, . \, 4} + \dots \right]$$
$$- s \left[\frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2}{1 \, . \, 2} + \frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4}{3 \, . \, 4} + \dots\dots \right]$$
$$- d \left[\frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^2}{1 \, . \, 2} + \frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^4}{3 \, . \, 4} + \dots\dots \right]$$

wobei

$$d = 1000 \qquad s = 200$$
$$a = 592 \qquad m = 110$$
$$b = 408 \qquad u = 90$$
$$\delta = 184 \qquad \sigma = 20$$
$$\sigma + \delta = 204$$
$$s + d = 1200$$
$$m + a = 702$$
$$n + b = 498$$

ist.

Da nun

$$\frac{\sigma}{s} = 0{,}1 \qquad \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 = 0{,}01 \qquad \left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}0001$$

$$\left(\frac{\delta}{p}\right) = 0{,}184 \qquad \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}033856 \qquad \left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}0011461$$

$$\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right) = 0{,}1698 \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0{,}0288874 \quad \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}00083506$$

ist, so können die 6ten Potenzen in lA vernachlässigt werden, wenn man bloss auf 6 Dezimalstellen rechnet, und man erhält

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0{,}0144437$$
$$\frac{1}{12}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}0000696$$
$$0{,}0145133$$

$$(s+d)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 + \cdot\cdot\right] = 17{,}41596$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 = 0{,}005$$
$$\frac{1}{12}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}0000083$$
$$0{,}0050083$$

$$s\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 + \cdot\cdot\right] = 1{,}00166$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}0169280$$
$$\frac{1}{12}\left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}0000955$$
$$0{,}0170235$$

$$d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 + \cdot\cdot\right] = 17{,}0235$$

$$s\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 + \cdot\cdot\right] + d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 + \cdots\right] = 18{,}02516$$

$$l\,A = -0{,}60920$$
$$0{,}43429448\ l\,A = -0{,}2645722$$

Nebenrechnung:

$$\log l\,A = 0{,}7847599 - 1$$
$$\log 0{,}42 = 0{,}6377843 - 1$$
$$0{,}4225442 - 1$$

Zur Berechnung der Wurzelgrösse ergibt sich

$$\begin{array}{lcl}
\log\ s\,d^3 & = & 11,3010300 \\
\log\ (m+a) & = & 2,8463371 \\
\log\ (n+b) & = & 2,6972293 \\
\hline
\log\ Z & = & 16,8445964
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\log\ 2\pi & = & 0,7981799 \\
\log\ m & = & 2,0413927 \\
\log\ n & = & 1,9542425 \\
\log\ a & = & 2,7723217 \\
\log\ b & = & 2,6106602 \\
\log\ (s+d)^3 & = & 9,2375436 \\
\hline
\log\ N & = & 19,4143406
\end{array}$$

$$\log \frac{Z}{N} = 0,4302558-3$$

$$\log \sqrt{\frac{Z}{N}} = 0,7151278-2$$

$$\begin{array}{rcl}
0,4342 \ldots l\ A & = & -0,2645722 \\
\hline
\log\ W & = & 0,4505556-2
\end{array}$$

$$W = 0,02822$$

Dieser Wert von W ist zwar sehr klein, aber im Verhältnis zu dem Werte von W, den man erhält, wenn man etwa annimmt, dass $m = n = 100$ setzt, sehr gross, wie das folgende Beispiel zeigt.

Aufgabe 243. Eine Münze wurde 1000-mal in die Höhe geworfen, wobei 592-mal Wappen und 408-mal Schrift auffiel. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 200 folgenden Würfen 100-mal Wappen und 100-mal Schrift geworfen wird?

Auflösung. Wir haben dieselbe Formel, wie in Aufgabe 242 zu benützen, wobei

$$\begin{array}{lll}
d = 1000 & & s = 200 \\
a = 592 & & m = 100 \\
b = 408 & & n = 100 \\
\delta = 184 & & \sigma = 0
\end{array}$$

$$\sigma + \delta = 184$$
$$s + d = 1200$$
$$m + a = 692$$
$$n + b = 508$$

so dass

$$\left(\frac{\delta}{d}\right) = 0,183 \qquad \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0,033856 \qquad \left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0,0011461$$

$$\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right) = 0,15368 \quad \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0,0235111 \quad \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0,0005528$$

wird. Dann folgt:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 & = & 0,0117555 \\
\frac{1}{1.2} \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 & = & 0,0000461 \\
\hline
 & & 0,0118016
\end{array}$$

$$(s+d)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)+\cdots\right] = 14{,}16192$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}0169280$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}0000955$$
$$0{,}0170235$$

$$d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2+\cdots\right] = 17{,}02350$$

Nebenrechnung:

$\log l\,A = 0_n{,}4566059$
$\log 0{,}43 = 0{,}6377833-1$
$0_n{,}0943902$

und da $\sigma = 0$ ist, ergibt sich

$$l\,A = -2{,}86158$$
$$0{,}43429448\ l\,A = -1{,}242761$$

Für die Wurzelgrösse folgt

$\log s\,d^3 = 11{,}3010300$
$\log (m+a) = 2{,}8401061$
$\log (n+b) = 2{,}7058637$
$\log Z = 16{,}8469998$

$\log 2\pi = 0{,}7981799$
$\log m\,n = 4{,}0000000$
$\log a = 2{,}7723217$
$\log b = 2{,}6106602$
$\log (s+d)^3 = 9{,}2375436$
$\log N = 19{,}4187054$

$\log \frac{Z}{N} = 0{,}4282944-3$

$\log \sqrt{\frac{Z}{N}} = 0{,}7141472-2$

$0{,}4342\ldots l\,A = -1{,}2427610$

$\log W = 0{,}4713862-3$

$W = 0{,}002960$

Es ist also die Wahrscheinlichkeit, dass 110-mal Wappen geworfen wird 10-mal so gross, als die Wahrscheinlichkeit, dass es 100-mal auffällt bei 200 Würfen, nachdem es bei 1000 Würfen 592-mal auffiel. (Vergleiche die Anmerkung 43.) Wir werden sogleich sehen, welche Anzahl bei 200 Würfen die grösste Wahrscheinlichkeit besitzt. (Vergleiche die folgende Aufgabe.)

Aufgabe 244. Eine Münze wurde 1000-mal geworfen, wobei 592-mal Wappen und 408-mal Schrift auffiel. Man will noch 200 Würfe machen. Welche Anzahl von Würfen, in denen Wappen auffällt, hat die grösste Wahrscheinlichkeit und wie gross ist diese?

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 53 bestimmt sich die Anzahl i der Würfe, in denen Wappen auffällt, so dass diese Anzahl i die grösste Wahrscheinlichkeit besitzt aus der Gleichung

$$i = \left[\frac{s\,m-n}{m+n}\right]$$

wenn das Ereignis bei $m+n$ Versuchen m-mal bereits eintrat, und s die Anzahl der noch zu machenden Würfe bedeutet.

Für die vorliegende Aufgabe ist

$$m = 592, \qquad n = 408$$
$$s = 200$$

also

$$\frac{s\,m - n}{m+n} = \frac{117992}{1000} = 117{,}992$$

Nehmen wir also $i = 117$, so ist die grösste Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden, dass 117-mal Wappen und 83-mal Schrift auffällt. Um diese Wahrscheinlichkeit selbst zu berechnen, benutzen wir die Formel 43 resp. 43a und b, also

$$\log W = 0{,}43429448\; l\,A + \log \sqrt{\frac{s\,d^3\,(m+a)\,(n+b)}{2\,\pi\, m\, n\, a\, b\,(s+d)^3}}$$

$$l\,A = (s+d)\left[\frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4}{3.4} + \ldots\right]$$
$$- s\left[\frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4}{3.4} + \ldots\ldots\right]$$
$$- d\left[\frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^4}{3.4} + \ldots\ldots\right]$$

wobei

$$d = 1000 \qquad s = 200$$
$$a = 592 \qquad m = 117$$
$$b = 408 \qquad n = 83$$
$$\delta = 184 \qquad \sigma = 34$$
$$\sigma+\delta = 218$$
$$s+d = 1200$$
$$m+a = 709$$
$$n+b = 491 \text{ ist.}$$

Also folgt

$$\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right) = 0{,}18166 \qquad \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0{,}033002 \qquad \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}0010892$$

$$\left(\frac{\sigma}{s}\right) = 0{,}17 \qquad \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 = 0{,}0289 \qquad \left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}0008352$$

$$\left(\frac{\delta}{d}\right) = 0{,}184 \qquad \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}033856 \qquad \left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}0011462$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0{,}0165010$$
$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}0000907$$
$$\overline{0{,}0165917}$$

Nebenrechnung:

$$\log \frac{\sigma+\delta}{s+d} = 0{,}2592753-1$$
$$\log \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 = 0{,}5185506-2$$
$$\log \left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4 = 0{,}0371012-3$$
$$\log \left(\frac{\sigma}{\delta}\right) = 0{,}2304489-1$$
$$\log \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 = 0{,}4608978-2$$
$$\log \left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}9217956-4$$
$$\log \left(\frac{\delta}{d}\right) = 0{,}2648178-1$$
$$\log \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}5296356-2$$
$$\log \left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}0592712-3$$

$$\log l\,A = 0_n{,}2400498-2$$
$$\log 42\,.. = 0{,}6377843-1$$
$$0_n{,}8778341-3$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 = 0{,}0144500$$
$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4 = 0{,}0000696$$
$$0{,}0145196$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = 0{,}0169280$$
$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^4 = 0{,}0000955$$
$$0{,}0170235$$

$$(s+d)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2 + \ldots\right] = 19{,}91004$$
$$s\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 + \ldots\ldots\right] = 12{,}90392$$
$$d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2 + \ldots\ldots\right] = 17{,}0235$$
$$l\,A = -0{,}01738$$
$$0{,}43429448\; l\,A = -0{,}0075480.$$

Für die Wurzelgrösse ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\log\ s\,d^3 &= 11{,}3010300\\
\log\ (m+a) &= 2{,}8506462\\
\log\ (n+b) &= 2{,}6910815\\
\log\ Z &= 16{,}8427577
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\ 2\pi &= 0{,}7981799\\
\log\ m &= 2{,}0681859\\
\log\ n &= 1{,}9190781\\
\log\ a &= 2{,}7723217\\
\log\ b &= 2{,}6106602\\
\log\ (s+d) &= 9{,}2375436\\
\log\ N &= 19{,}4059694
\end{aligned}$$

$$\log \frac{Z}{N} = 0{,}4367883-3$$
$$\log \sqrt{\frac{Z}{N}} = 0{,}7183942-2$$
$$0{,}43429448\; l\,A = -0{,}0075480$$
$$\log W = 0{,}7108462-2$$

und daher

$$W = 0{,}051386$$

welcher Wert fast doppelt so gross ist als der in Aufgabe **242** und 20-mal so gross ist als der in Aufgabe **243** gefundene Wert.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

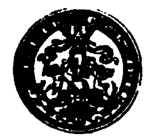
der bis jetzt erschienenen Hefte

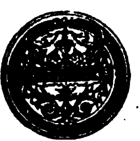
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

851. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Wahrscheinlichkeitsrechnung Dritter Teil. Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen. Forts. v. Heft 841. — Seite 225—240. Mit 6 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.
Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach System Kleyer bearbeitet von Dr. Karl Bobek.

Fortsetzung v. Heft 841. — Seite 225—240. Mit 6 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1891.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teils der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht verge... en mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen B... fs-zweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapital lebendige Kraft verleihe... nd somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen g... en.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische ... af-gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der ... en verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Ve... er, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird dere... ng thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verla...**

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 245. Aus einer Urne wurden bei 25 Zügen stets weisse Kugeln gezogen, wie viel Züge muss man noch machen, damit die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel a priori den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt?

Andeutung. Ist s die gesuchte Zahl, so muss nach Aufgabe 230

$$W = \frac{26}{26+s} = \frac{1}{2}$$

sein.

Aufgabe 246. Aus einer Urne wurden bei 30 Zügen 25 weisse Kugeln gezogen, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 10 folgenden Zügen 8 weisse Kugeln gezogen werden? Die gezogene Kugel wird jedesmal zurückgelegt.

Andeutung. Man wende die Formel 40 an.

Aufgabe 247. Bei 15 Zügen aus einer Urne wurden 10 weisse und 5 schwarze Kugeln gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 8 folgenden Zügen wenigstens 3 und höchstens 6 weisse Kugeln gezogen werden?

Andeutung. Es ist die Formel 41 anzuwenden.

Aufgabe 248. Bei 30 Zügen aus einer Urne wurden 15 weisse und 15 schwarze Kugeln gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 8 folgenden Zügen wenigstens eine weisse Kugel erscheint?

Andeutung. Man benütze die Formel 42.

Aufgabe 249. Eine Münze wurde 100-mal in die Höhe geworfen und hiebei wurde 60-mal Wappen und 40-mal Schrift gesehen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 3 folgenden Würfen wenigstens einmal Wappen fällt?

Aufgabe 250. Aus einer Urne wurden 1200 Züge gemacht und hiebei 856 weisse und 344 schwarze Kugeln gezogen. Nach jedem Zuge wird die Kugel zurückgelegt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den nächsten 2 Zügen eine weisse Kugel erscheint?

Andeutung. Man benütze die Formel 40.

Aufgabe 251. Man will auf das Ziehen einer weissen Kugel aus einer Urne einen Preis von 1 Mark setzen, wie muss der Einsatz einer billigen Wette sein, wenn man nach 20 gemachten Zügen findet, dass 15 weisse und 5 schwarze Kugeln gezogen wurden?

Andeutung. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer weissen Kugel im nächsten Zug nach Formel 39, worauf sich der Einsatz nach Formel 14 berechnet.

Aufgabe 252. Man hat aus einer Urne, die 20 Kugeln enthält, eine weisse Kugel gezogen, legt dieselbe wieder zurück. Welchen Einsatz kann man billiger Weise wagen, um einen Gewinnst von 1 Mark dann zu erhalten, wenn man im nächsten Zuge wieder eine weisse Kugel zieht?

Andeutung. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit nach Aufgabe 235 und dann den Einsatz nach Formel 14.

Aufgabe 253. Man hat aus einer Urne eine weisse Kugel gezogen. Auf den nächsten Zug einer weissen Kugel ist ein Preis von 3 Mark gesetzt. Welchen Einsatz kann man billiger Weise wagen?

Andeutung. Man benütze hiezu die Lösung der Aufgabe 237 und hernach die Formel 14.

Aufgabe 254. Eine Urne enthält höchstens 6 Kugeln. Man hat 3 auf einmal herausgezogen und findet, dass unter ihnen 2 weisse und 1 schwarze sich finden. Man legt die gezogenen Kugeln wieder zurück und frägt nach der Wahrscheinlichkeit, dass bei dem nächsten Zuge eine weisse Kugel erscheint?

Andeutung. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier weissen und 1 schwarzen Kugel unter der Annahme, dass die Urne 3, 4, 5, 6 Kugeln enthält, von denen wenigstens 2 weiss und 1 schwarz sein müssen. Dann verfahre man wie in Aufgabe 238 nur beachte man, dass die Wahrscheinlichkeiten nach Aufgabe 25 zu berechnen sind.

Aufgabe 255. In einer Urne sind höchstens 4 Kugeln. Man hat 10 Ziehungen gemacht, nach jeder Ziehung die Kugel zurückgelegt und findet, dass man 7 weisse und 3 schwarze Kugeln gezogen hat. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, im nächsten Zuge wieder eine weisse Kugel zu ziehen?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 238.

Aufgabe 256. Eine Urne enthält höchstens 5 Kugeln. Bei vier vorgenommenen Ziehungen kommen 4 weisse Kugeln zum Vorschein. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im nächsten Zuge wieder eine weisse Kugel erscheint?

Andeutung. Vergleiche die Anmerkung der Aufgabe 238.

Aufgabe 257. In einer Urne sind höchstens 5 Kugeln. Man hat 6 Ziehungen gemacht und hiebei 4 weisse und 2 schwarze Kugeln gezogen. Wie viel kann als Einsatz gewagt werden, wenn auf das Ziehen einer weissen Kugel im nächsten Zuge ein Preis von 1 Mark gesetzt ist?

Andeutung. Die Lösung folgt aus der Lösung der Aufgabe 238 und Formel 14.

Aufgabe 258. Zwei Personen A und B spielen eine Kartenpartie um einen Einsatz von 5 Mark. Diesen Einsatz gewinnt derjenige, der zuerst 6 Stiche macht. Nachdem A schon 4 und B dagegen 3 Stiche gemacht hat, müssen sie das Spiel abbrechen. In welchem Verhältnisse wird der Einsatz unter sie zu teilen sein?

Andeutung. Vergleiche die allgemeine Lösung in Aufgabe 239.

Aufgabe 259. In einer Urne sind weisse und schwarze Kugeln in unbekannter Anzahl. Man hat 8340 Ziehungen gemacht und hiebei 5638 weisse und 2702 schwarze Kugeln gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man in den nächsten 1200 Ziehungen 786 weisse und 414 schwarze Kugeln ziehen wird?

Andeutung. Vergleiche die Lösung der Aufgabe 240.

Aufgabe 260. Unter denselben Voraussetzungen, wie in Aufgabe 259, soll man die Wahrscheinlichkeit dafür finden, dass bei 1200 folgenden Zügen 600 weisse und 600 schwarze Kugeln gezogen werden?

Aufgabe 261. Unter denselben Bedingungen, wie in Aufgabe 259, soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass in den 1200 folgenden Zügen 972 weisse und 228 schwarze Kugeln gezogen werden?

Aufgabe 262. Eine Münze wird 1560-mal in die Höhe geworfen, wobei 930-mal Wappen und 630-mal Schrift auffällt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 500 folgenden Würfen

1) 310-mal Wappen, 190-mal Schrift
2) 400 „ „ 100 „ „
3) 250 „ „ 250 „ „
4) 100 „ „ 400 „ „

auffällt?

Andeutung. Die Lösung geschieht, wie die der Aufgabe 242.

Aufgabe 263. Eine Münze wird 1560-mal in die Höhe geworfen, wobei 930-mal Wappen und 630-mal Schrift auffällt. Man will die Münze noch 500 mal werfen. Welche Anzahl für das Auffallen von Wappen hat die grösste Wahrscheinlichkeit und wie gross ist diese?

Andeutung. Vergleiche Aufgabe 244.

C. Über die wahrscheinlichste Hypothese.

(Vergleiche die Frage 40).

Frage 54. Was versteht man unter der wahrscheinlichsten Hypothese?

Antwort. Die wahrscheinlichste Hypothese ist diejenige, deren Wahrscheinlichkeit den grössten Wert besitzt.

Zufolge des Theorems von Bayes (Frage 41) ist diese Definition identisch mit der in Antwort auf Frage 40 gegebenen.

Frage 55. Ein Ereignis ist bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eingetreten, welches ist die wahrscheinlichste Hypothese für die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses?

Erkl. 61. Bezüglich der Bedingung $\frac{dw}{dx}=0$ für das Maximum, vergleiche Kleyer, Lehrbuch der Integral- u. Differentialrechnung.

Antwort. Ist x die unbekannte Hypothese, so ist

$$w = \frac{x^m(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}$$

die Wahrscheinlichkeit der Hypothese x. Soll x die wahrscheinlichste Hypothese sein, so muss w ein Maximum sein, d. h. es muss

$$\frac{dw}{dx} = 0$$

werden. Der Nenner von w, sowie dx ist konstant, also muss

$$\frac{d\,[x^m(1-x)^n]}{dx} = m x^{m-1}(1-x)^n - n x^m (1-x)^{n-1}$$
$$= x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,[m - x\,(m+n)] = 0$$

sein.

Da nun $x=0$ sowohl als $x=1$ den Wert w zu Null machen, sobald $m>1$, $n>1$ ist, so bleibt nur noch der Wert

$$x = \frac{m}{m+n}$$

übrig, der w zu einem Maximum machen kann.

Da aber

$$\frac{d^2[x^m(1-x)^n]}{dx^2} = [m-x\,(m+n)]\,\frac{d\,x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{dx} - x^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}\,(m+n)$$

ist, so wird

$$\left[\frac{d^2[x^m(1-x)^n]}{dx^2}\right]_{x=\frac{m}{m+n}} = -\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-1}\cdot\left(\frac{n}{m+n}\right)^{n-1}\cdot(m+n),$$

also wesentlich negativ, daher ist der Wert

$$x = \frac{m}{m+n}$$

der einzige zwischen 0 und 1 liegende Wert, welcher w zu einem Maximum macht.

Ist $n=0$, so ist $x=1$, und wenn $m=0$, dann ist $x=0$ der Wert, welcher w zu einem Maximum macht, welche Werte auch in der Formel $x=\frac{m}{m+n}$ enthalten sind.

Ist also ein Ereignis bei $(m+n)$ Versuchen m mal eingetreten, so ist die wahrscheinlichste Hypothese

$$p = \frac{m}{m+n}$$

d. h. dieser Wert von p ist der wahrscheinlichste für die Wahrscheinlichkeit, die dem Ereignisse zukommt.

Hat man beispielsweise Kugeln aus einer Urne gezogen und findet man nach $(m+n)$ Zügen, dass man m weisse und n schwarze gezogen hat, so ist der wahrscheinlichste Wert der Wahrscheinlichkeit für die gemachten Züge $\frac{m}{m+n}$, d. h. es ist am wahrscheinlichsten, dass die Urne auf $m+n$ Kugeln m weisse und n schwarze enthalten hat.

Anmerkung 46. Setzt man

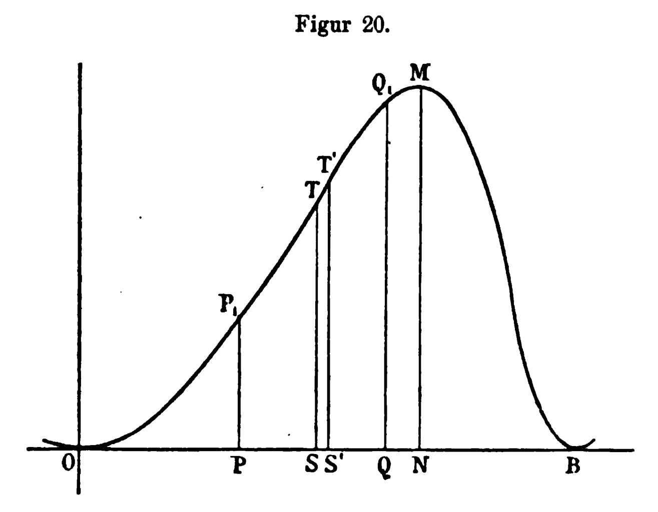
$$y = \frac{x^m (1-x)^n}{J_{m,n}}$$

wobei

$$J_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

ist, und deutet x und y als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so erhält man als geometrisches Bild der Abhängigkeit von x und y eine Curve. Wir setzen vorerst $m > o$ und $n > o$ voraus. Dann geht die Curve (Figur 20) durch den Koordinatenanfangspunkt O

Figur 20.



und den Punkt B, für den $OB = 1$ ist. Sie berührt daselbst auch die x-Achse, wenn $m > 1$ resp. $n > 1$ ist, da dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{J_{m,\,n}}\,[m - x\,(m+n)]$$

für diese Werte verschwindet. Ist

$$O\,N = \frac{m}{m+n} = p$$

so wird die Ordinate

$$N\,M = y = \frac{\left(\frac{m}{m+n}\right)^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^n}{J_{m,\,n}},$$

die grösste, also das Maximum darstellen. In M ist die Tangente an die Curve parallel zur x-Achse.

Ist $OS = x$, also $ST = y$, dann ist die Wahrscheinlichkeit der Hypothese x dargestellt durch

$$w = y\,dx$$

also durch die Fläche des unendlich kleinen Flächenstreifens $S\,S'\,T'\,T$, wenn $S\,S' = dx$ ist.

Nach Formel 32 ist dann die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass die Hypothese x zwischen $a = OP$ und $b = OQ$ liegt, ausgedrückt durch

$$W = \int_a^b y\,dx$$

also die Fläche $P\,Q\,Q_1\,P_1$.

Die ganze Fläche $O\,B\,M\,O$, welche die Curve mit dem Stück OB der x-Achse begrenzt ist $= 1$, da

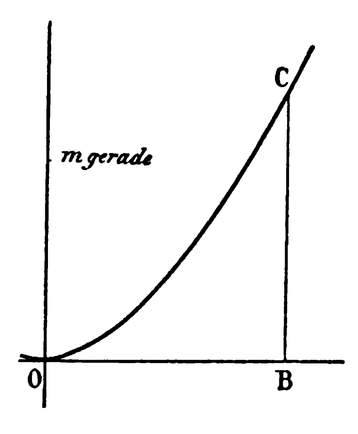
$$\int_o^1 y\,dx = \frac{1}{J_{m,\,n}} \int_o^1 x^m (1-x)^m\,dx = \frac{J_{m,\,n}}{J_{m,\,n}} = 1 \text{ ist.}$$

Ist $n = o$, dann ist die Gleichung unserer Curve, da $J_{m,\,o} = \frac{1}{m+1}$ ist

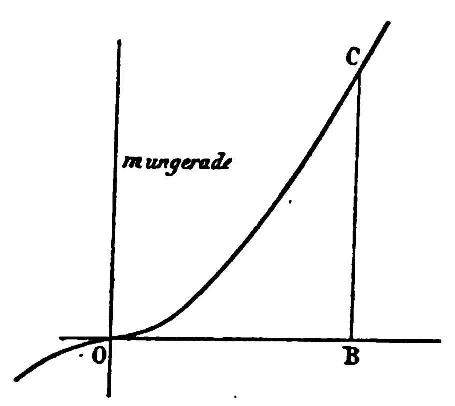
$$y = \frac{x^m}{m+1}$$

Die Curve berührt, sobald $m > 1$ ist [für $m = 1$ ist sie eine Gerade], die x-Achse

Figur 21.



Figur 22.

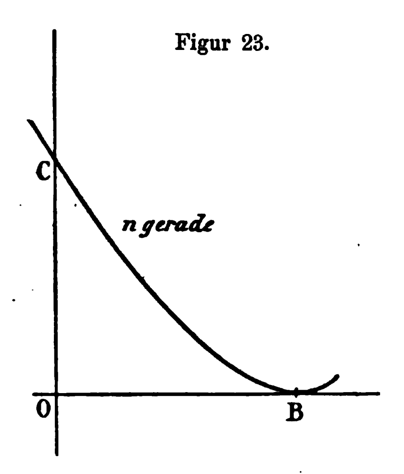


in o und geht ins Unendliche. Ein Maximum tritt dann nicht mehr ein, es ist $BC = \frac{1}{m+1}$ die grösste Ordinate, die in Betracht kommt, wenn $OB = 1$ ist.

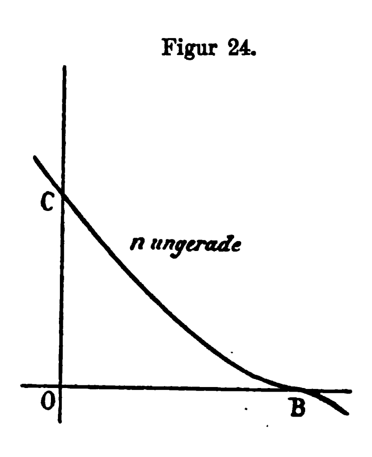
Ist m gerade, so ist die Curve Figur 21 symmetrisch zur y-Achse, und ist m ungerade, so hat die Curve die Form der Figur 22, ist symmetrisch in Bezug auf den Anfangspunkt, der ein Wendepunkt ist.

Für $m = o$ hat die Curve dieselben Formen, nur dass sie durch den Punkt $x = 1$ auf der x-Achse geht.

Figur 23.



Figur 24.



Ihre Gleichung ist

$$y = \frac{(1-x)^n}{n+1},$$

und OC ist wieder die grösste in Betracht kommende Ordinate und zwar ist

$$OC = \frac{1}{n+1}$$

Die Fläche OBC ist stets $= 1$.

Frage 56. Es sei ω die unbekannte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eingetreten ist. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass der Wert ω von dem wahrscheinlichsten Werte p um höchstens $\pm \varepsilon$ abweicht?

Antwort. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

$$p + \varepsilon > \omega > p - \varepsilon$$

ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese x zwischen $p + \varepsilon$ und $p - \varepsilon$ liege. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber nach Formel 32:

$$W = \frac{\int\limits_{p-\varepsilon}^{p-\varepsilon} x^m (1-x)^n dx}{\int\limits_0^1 x^m (1-x)^n dx} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Wir haben diesen Ausdruck nur zur praktischen Rechnung vorzubereiten.

Wir setzen $p+q=1$, also

$$p=\frac{m}{s},\ q=\frac{n}{s},\ s=m+n \qquad (2)$$

und führen eine neue Integrationsvariable im Zähler ein, indem wir

$$\begin{aligned} x &= p+z \\ 1-x &= q-z \\ dx &= dz \end{aligned}$$

setzen, werden die Grenzen $p-\varepsilon$ und $p+\varepsilon$ übergehen in $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ für z, so dass

$$\int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon} x^m\,(1-x)^n dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (p+z)^m\ (q-z)^n\,dz\ ..(3)$$

wird.

Wir entwickeln den Logarithmus des Argumentes des Integrals in eine Potenzreihe von z, indem wir

$$\log\left[(p+z)^m\,(q+z)^n\right] = a+bz+cz^2+dz^3+\ldots$$

setzen, so dass

$$m\log\,(q+z)+n\log\,(q-z) = a+bz+cz^2+dz^3+\ldots$$

wird. Durch aufeinanderfolgende Differentiationen ergibt sich nun:

$$\frac{m}{p+z}-\frac{n}{q-z}=b+2cz+3dz^2+..$$

$$-\frac{m}{(p+z)^2}-\frac{n}{(q-z)^2}=2c+6dz+\ldots$$

$$+\frac{2m}{(p+z)^3}-\frac{2n}{(q-z)^3}=6d+\ldots$$

Setzt man der Reihe nach in den Gleichungen $z=o$, so erhält man:

$$\begin{aligned} m\log p+n\log q &= a \\ \frac{m}{p}-\frac{n}{q} &= b \\ -\frac{m}{p^2}-\frac{n}{q^2} &= 2c \\ \frac{2m}{p^3}-\frac{2n}{q^3} &= 6d \end{aligned}$$

Da $sp=m$, $sq=n$ ist, folgt aus den Relationen:

$$a = \log p^m q^n$$
$$b = o$$
$$c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{s}{pq}$$
$$d = \frac{1}{3} s \frac{q^2 - p^2}{p^2 q^2}$$

und da man höhere als 2te Potenzen von z vernachlässigen kann, da z nur sehr kleine Werte annehmen soll, so kann

$$\log [(p+z)^m (q-z)^n] = \log p^m q^n - \frac{s}{2pq} z^2$$

gesetzt werden, also

$$(p+z)^m (q-z)^n = p^m q^n e^{-\frac{s}{2pq} z^2},$$

dann wird

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (p+z)^m (q-z)^n dz = p^m q^m \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{s}{2pq} z^2} dz$$

und wenn noch

$$\frac{s z^2}{2pq} = t^2$$

also

$$z = t \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$
$$dz = dt \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

gesetzt wird, so folgt

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (p+z)^m (q-z)^n dt = p^m q^n \sqrt{\frac{2pq}{s}} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-t^2} dt$$

wobei

$$\tau = \varepsilon \sqrt{\frac{s}{2pq}} \quad \ldots\ldots (4)$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (3) übergeht dann (1) in

$$W = \frac{p^m q^n \sqrt{\frac{2pq}{s}}}{J_{m,n}} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-t^2} dt$$

Nun ist nach Formel h, wenn die Gleichungen (2) berücksichtigt werden:

$$J_{m,n} = p^{m+1/2} q^{n+1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{s}},$$

so dass

$$W = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-t^2} dt$$

wird, oder wenn man berücksichtigt, dass

$$\int_{-\tau}^{+\tau} e^{-t^2} dt = \int_{-\tau}^{0} e^{-t^2} dt + \int_{0}^{\tau} e^{-t^2} dt$$

$$= \int_{0}^{\tau} e^{-t^2} dt + \int_{0}^{\tau} e^{-t^2} dt$$

$$= 2\int_{0}^{\tau} e^{-t^2} dt$$

ist:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\tau} e^{-t^2} dt.$$

Ist also bei $s = m + n$ Versuchen das Ereignis m-mal eingetreten, so ist der wahrscheinlichste Wert der unbekannten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses der Wert

$$p = \frac{m}{m+n}$$

und die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass der Wert ω der wirklichen Wahrscheinlichkeit zwischen

$$p + \varepsilon \text{ und } p - \varepsilon$$

liegt, ist gegeben durch die Formel

Erkl. 62. Das durch die Formel 44 ausgedrückte Theorem, wird auch das Theorem von *Bayes* genannt. Vergleiche die Erklärung 53.

Formel 44: $$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\tau} e^{-t^2} dt$$

$$\tau = \varepsilon \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}} = \varepsilon s \sqrt{\frac{s}{2m(s-m)}}$$

Anmerkung 47. Die Formeln 44 zeigen, dass für jedes m und s sich ein bestimmtes ε ergibt, für das W einen bestimmten Wert annimmt.

Denn durch W ist τ bestimmt nach Tabelle II, also auch ε, sobald s und m gegeben sind. Hält man W fest z. B. sehr nahe der Einheit, so dass etwa $\tau = 4$ ist, so wird,

da m und $s-m$ mit s gleichzeitig wächst, doch der Quotient $\frac{s}{m}$ und $\frac{s}{s-m}$ endlich bleiben und es wird daher

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\tau.\sqrt{2\,\frac{m}{s}\,.\,\frac{s-m}{s}}$$

mit wachsendem s ins Unendliche abnehmen, d. h. je grösser die Anzahl der Versuche wird, desto mehr wird sich p dem wahren Werte ω nähern mit einer Wahrscheinlichkeit, die von 1 beliebig wenig verschieden ist.

Frage 57. Was versteht man unter dem wahrscheinlichen Fehler der wahrscheinlichsten Hypothese?

Antwort. Unter dem wahrscheinlichen Fehler der wahrscheinlichsten Hypothese versteht man diejenige Abweichung ε vom wahren Werte ω der Wahrscheinlichkeit, für welche sich die Wahrscheinlichkeit $W = \frac{1}{2}$ ergibt. Da aus

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-t^2}\,dt$$

$$\tau = 0{,}476936$$

folgt, so ergibt sich, wenn man mit ρ den wahrscheinlichen Fehler bezeichnet:

Formel 45: $\rho = 0{,}477936\sqrt{\frac{2p\,(1-p)}{s}}$

wobei

$$p = \frac{m}{s}$$

ist.

Die Formel 45 hat folgenden Sinn:

Ist das Ereignis E bei s Versuchen m mal eingetreten, so kann man 1 gegen 1 wetten, dass der wahre Wert ω der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E zwischen

$$p+\rho \text{ und } p-\rho$$

liegt, wenn

$$p = \frac{m}{s}$$

gesetzt wird. Denn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ω zwischen

$$p+\rho \text{ und } p-\rho$$

liegt, ist gleich $\frac{1}{2}$

Frage 58. Ein Ereignis ist bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eingetreten, welches ist die wahrscheinlichste Anzahl, wie oftmal dasselbe Ereignis bei a weiteren Versuchen eintreten wird?

Antwort. Nach Frage 51 und Formel 40 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis, nachdem es bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eintrat, bei a folgenden Versuchen i mal eintritt:

$$w_i = \binom{a}{i} \frac{J_{m+i,\, n+a-i}}{J_{m,\, n}}$$

Nach dem zu Frage 53 Bewiesenen ist

$$w_{i+1} \gtrless w_i$$

so lange

$$a\, m - n \gtrless i\, (m+n)$$

ist. Es wird sich also der grösste Wert von w_i ergeben für

$$i = \left[a \frac{m}{m+n} - \frac{n}{m+n}\right]$$

Erkl. 63. $[x]$ soll bedeuten, die grösste ganze in x enthaltene Zahl.

oder da i eine ganze Zahl sein soll, kann man auch, da $\frac{n}{m+n}$ ein kleiner Bruch ist,

$$i = \left[a \frac{m}{m+n}\right]$$

Erkl. 64. Es wird $\left[a \frac{m}{m+n}\right]$ von $\left[\frac{a\,m}{m+n} - \frac{n}{m+n}\right]$ höchstens um eine Einheit verschieden sein.

annehmen für denjenigen Wert, für welchen w_i den grössten Wert annimmt, d. h. es ist am wahrscheinlichsten, dass bei a nachfolgenden Versuchen das Ereignis $a \frac{m}{m+n}$-mal eintritt und $a \frac{n}{m+n}$-mal nicht eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit für dieses Eintreten selbst ergibt sich, wenn man in w diesen Wert für i einsetzt.

Frage 59. Ein Ereignis ist bei einer grossen Anzahl von $s = m+n$ Versuchen m-mal eingetreten, wie lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass es bei a folgenden Versuchen i-mal eintreten wird, darstellen, wenn auch a eine sehr grosse Zahl ist, i nicht viel von der Zahl

$$a \frac{m}{m+n}$$

verschieden ist und $\frac{a}{s}$ einen endlichen

Antwort. Wir verfahren hier genau so, wie wir es bei Frage 16 gethan haben.

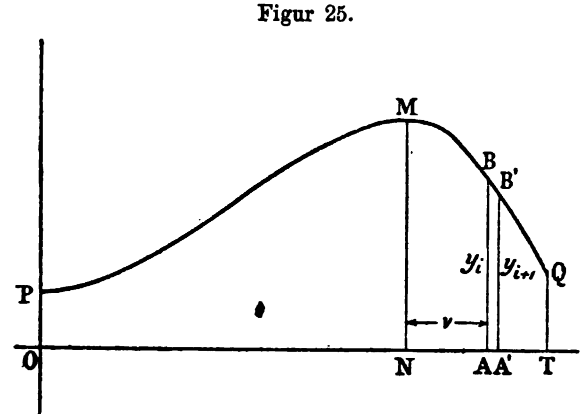
Der Kürze halber setzen wir

$$p = \frac{m}{m+n} \qquad q = \frac{n}{m+n}$$

dann wird die Curve (Figur 25), welche die Endpunkte der Ordinaten



Wert besitzt, wenn auch a und s sehr gross sind?



Figur 25.

$$y_i = \binom{a}{i} \frac{J_{m+i,\, n+a-i}}{J_{m,\, n}}$$

verbindet, deren Abscissen i sind, für die Abscisse $ON = p \,.\, a$ den höchsten Punkt M aufweisen.

Ist $OA = i$, $OA' = i + 1$, so ist $AB = y_i$ und $A'B' = y_{i+1}$ und es ist

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{\binom{a}{i+1}}{\binom{a}{i}} \cdot \frac{J_{m+i+1,\, n+a-i-1}}{J_{m+i,\, n+a-i}}$$

$$= \frac{a-i}{i+1} \cdot \frac{m+i+1}{n+a-i}$$

Wir wollen nun die Abscissen statt von O aus zu zählen, von N aus zählen, indem wir

$$NA = \nu \quad NA' = \nu + 1$$

setzen, bezeichnen wir auch die Ordinaten

$$y_i = AB \text{ mit } y_\nu$$

und

$$y_{i+1} = A'B' \quad \text{„} \quad y_{\nu+1}$$

Dann ist, da $ON = p \,.\, a$ war:

$$OA = i = ap + \nu$$

daher

$$a - i = aq - \nu$$

und mithin wird

$$\frac{y_{\nu+1}}{y_\nu} = \frac{(aq-\nu)\,(m+1+\nu+ap)}{(ap+\nu+1)\,(n-\nu+aq)}$$

also

$$\frac{y_{\nu+1}-y_\nu}{y_\nu} = \frac{(aq-\nu)\,(ap+m+\nu+1)-(ap+\nu+1)\,(aq+n-\nu)}{(ap+\nu+1)\,(aq+n-\nu)}$$

$$= -\frac{\nu s + n}{a^2 pq + a\,[(q-p)\,\nu + q + pn] + (n-\nu)\,(\nu+1)}$$

$$\frac{y_{\nu+1}-y_\nu}{y_\nu} = -\frac{\nu + \frac{n}{s}}{\frac{a}{s}\, apq + \frac{a}{s}\,[(q-p)\,\nu + q + pn] + \frac{(n-\nu)\,(\nu+1)}{s}} \,.. (1)$$

Wir wollen nun einen Grenzübergang in der Gleichung (1) ausführen. Wir haben die Curve C über dem Stücke $OT = L$

der x-Achse betrachtet, ihre Ordinaten, im Abstande 1 von einander, waren die y_ν, so dass $y_{\nu+1}$ und y_ν aufeinanderfolgende Ordinaten waren. Hiebei waren auf der Strecke von O bis T im ganzen $a+1$ Ordinaten. Der Abstand zweier benachbarter Ordinaten bei sehr grossen a wird offenbar ein sehr kleiner sein, wir wollen ihn mit $\triangle x$ bezeichnen, so dass $\triangle x$ nun unsere Einheit auf der x-Achse ist, und $a \triangle x = L$ wird.

Dem Punkte A, dessen Abstand von N eben ν Einheiten war, geben wir die Abscisse x, so dass

$$\nu \triangle x = x$$

gesetzt wird.

Bezeichnen wir noch $y_{\nu+1} - y_\nu$ mit $\triangle y$ und lassen auch bei y_ν den Index weg, indem es das y ist, welches dem x entspricht, so übergeht die Gleichung (1), wenn Zähler und Nenner mit $\triangle x$ multipliciert wird in

$$\frac{\triangle y}{y} = -\frac{\nu \triangle x + \frac{n}{s} \triangle x}{\frac{a}{s} p q a \triangle x + \frac{a}{s} [(q-p) \nu \triangle x + (q+pn) \triangle x] + \frac{(n-\nu)(\nu+1)}{s} \triangle x}$$

$$= -\frac{x + \frac{n}{s} \triangle x}{\frac{a}{s} p q a \triangle x + \frac{a}{s} [(q-p) x + (q+pn) \triangle x] + \frac{(n-\nu)(\nu+1)}{s} \triangle x}$$

und daher ist:

$$\frac{1}{y} \frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{x + \frac{n}{s} \triangle x}{\frac{a}{s} p q a \triangle x^2 + \frac{a}{s} [(q-p) x + (q+pn) \triangle x] \triangle x + \frac{(n-\nu)(\nu+1)}{s} \triangle x^2}$$

Wir gehen nun zur Grenze über, indem wir einerseits $\triangle x$ gegen Null abnehmen lassen und gleichzeitig uns die Curve über der ganzen x-Achse erstreckt denken, so dass O und T ins Unendliche rücken.

Im Zähler wird

$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{n}{s} \triangle x = 0$$

ebenso ist im Nenner

$$\lim_{\Delta x = o} \frac{a}{s} [(q-p)x+(p+qn)\Delta x]\Delta x = o,$$

während

$$\lim_{\Delta x = o} \frac{(n-\nu)(\nu+1)}{s} \overline{\Delta x^2} = -\frac{x^2}{s}$$

ist, da $\nu . \Delta x = x$ ist.

Da ferner $a\Delta x = L$ ist, und bei dem zweiten Grenzübergange L unendlich gross wird, so wird $L\Delta x = a\overline{\Delta x^2}$ eine endliche Grösse sein.

Der Voraussetzung nach ist auch $\frac{a}{s}$ endlich, während s und a sehr grosse Zahlen sind. Infolge dessen wird im Nenner der Wert $-\frac{x^2}{s}$ gegenüber dem endlichen Werte

$$\frac{a}{s} p q a \overline{\Delta x^2} = \frac{1}{2k^2}$$

verschwindend klein sein, so dass man denselben vernachlässigen kann, und erhält daher, da

$$\lim_{\Delta x = o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

ist:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -2k^2 x$$

oder

$$\frac{dy}{y} = -2k^2 x\, dx$$

$$l y = -k^2 x^2 + l Y$$

also

$$y = Y e^{-k^2 x^2} \quad \dots . (2)$$

wobei Y eine Integrationskonstante und

$$k^2 = \frac{s}{2 p q a^2 \overline{\Delta x^2}} \quad \dots (3)$$

ist.

Soll die Gleichung (2) die Werte der y_i geben, so muss Y gleich der Maximalordinate NM gemacht werden und es ist dann y die Ordinate, welche im Abstande $\nu = \frac{x}{\Delta x}$ von N errichtet wurde. Hiebei darf ν nicht zu gross sein, weil sonst Übereinstimmung nicht mehr stattfindet. (Vgl. Anmerkung 24 Seite 100).

Frage 60. Ein Ereignis ist bei $s = m + n$ Versuchen m-mal eingetreten. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass es bei a weiteren Versuchen wenigstens $\left(a \frac{m}{m+n} - r\right)$-mal und höchstens $\left(a \frac{m}{m+n} + r\right)$-mal eintritt?

Antwort. Nach vorhergehender Frage kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis $\left(a \frac{m}{m+n} + \nu\right)$-mal eintritt dargestellt werden durch

$$y = Y e^{-k^2 x^2}$$

wobei

$$\nu . \triangle x = x$$

$$k^2 = \frac{s}{2 p q a^2 \triangle x^2}$$

ist, und Y eine Konstante bedeutet.

Setzt man also

$$r . \triangle x = \varepsilon$$

so ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \sum_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y$$

Dieser Ausdruck lässt sich etwas praktischer durch folgende Bemerkung umformen:

Da bei den folgenden a Versuchen das Ereignis entweder 0, 1 .... a mal eintreten muss, so muss die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten $= 1$ sein, d. h. bildet man die Summe der Terme von

$$r = -ap \text{ bis } r = aq$$

also für x, da $a \triangle x$ unendlich gross ist:

$$\text{von } -ap\triangle x = -\infty$$
$$\text{bis } \quad aq\triangle x = +\infty$$

so ist

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} y = 1.$$

Mithin ist auch

$$W = \frac{\sum_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y}{\sum_{-\infty}^{+\infty} y}$$

oder, wenn man mit dx Zähler und

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das **vollständige**

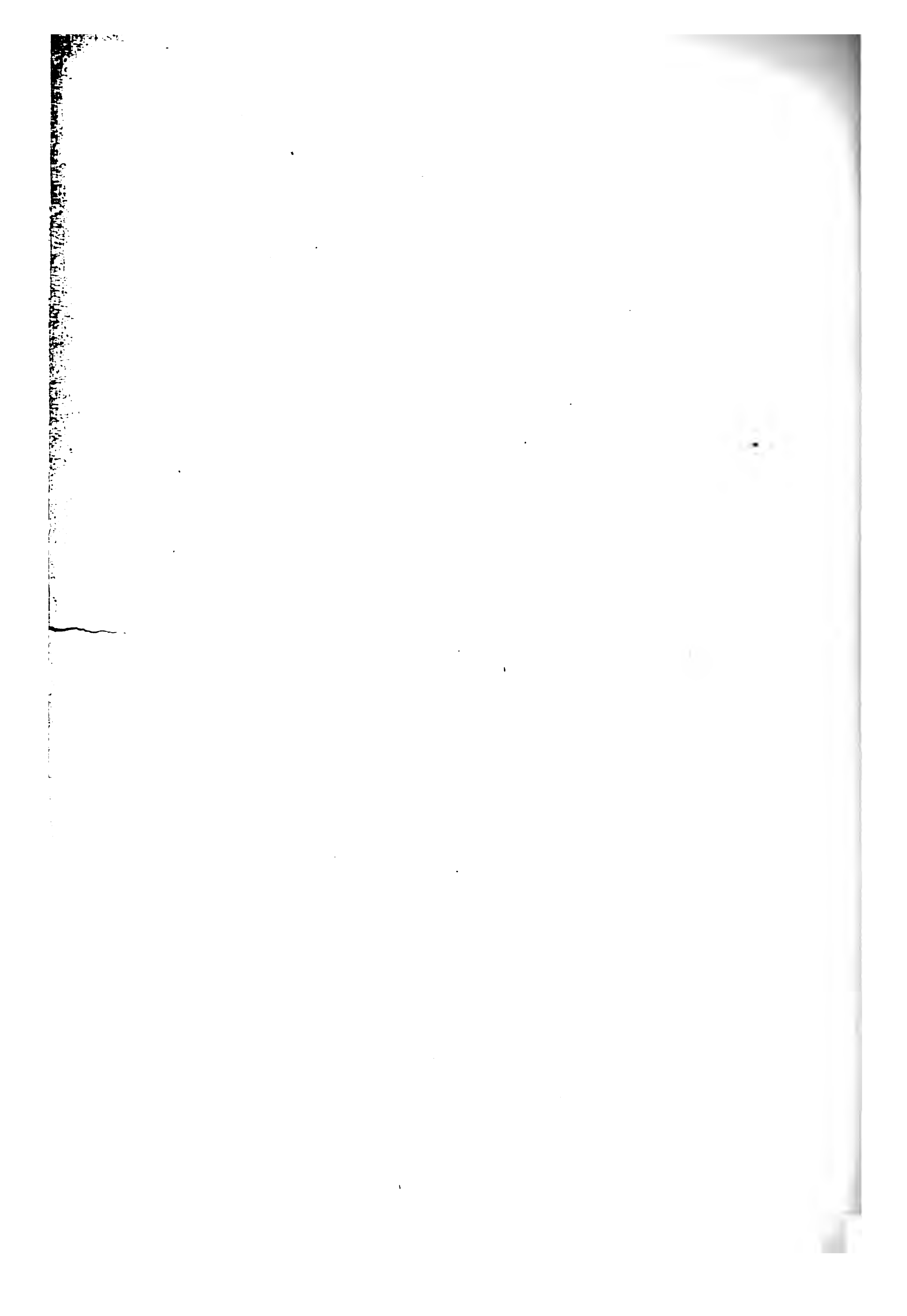
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

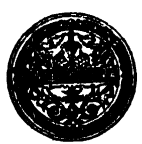


852. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Dritter Teil.
Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.
Forts. v. Heft 851. — Seite 241—256.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 851. — Seite 241—256.

Inhalt:
Ueber die wahrscheinlichste Hypothese. — Gelöste Aufgaben. — Ungelöste Aufgaben. — Aufgaben über Zeugenaussagen.

Stuttgart 1891.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die **Lösung** jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten.** Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergess n mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Be** ı- **zweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft** verleihen d somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** g

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische f-gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der N n verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Ver t, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und **wird** deren Er g thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandl...**

Nenner multipliziert und dann die Summen durch die bestimmten Integrale ersetzt:

$$W = \frac{\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,dx}.$$

Wenn man für y den oben in Gleichung (2) gefundenen Wert einsetzt so wird:

$$W = \frac{\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 x^2} dx}$$

Da nun nach Anhang I

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{k}$$

ist, so folgt:

$$W = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx.$$

Da ferner

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx = \int\limits_{-\varepsilon}^{0} e^{-k^2 x^2} dx + \int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx$$

$$= \int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx + \int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx$$

$$= 2 \int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx$$

ist, so wird

$$W = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2 x^2} dx$$

Wir setzen nun

$$kx = t$$
$$k\,dx = dt$$

so dass die Grenzen für t sich ergeben 0 und $\varepsilon k = \gamma$, wodurch sich dann

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

ergibt, und

$$\gamma = \varepsilon k = \frac{\varepsilon \sqrt{s}}{\triangle x . a \sqrt{2 p q}}$$

folgt. Da

$$r \triangle x = \varepsilon$$

gesetzt wurde, ergibt sich

$$\gamma = \frac{r \sqrt{s}}{a \sqrt{2 p q}}$$

und wir haben daher:

Ist ein Ereignis bei $s = m + n$ Versuchen m-mal eingetreten, so ist die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass es bei a folgenden Versuchen wenigstens $\left(a \frac{m}{m+n} - r\right)$ mal und höchstens $\left(a \frac{m}{m+n} + r\right)$ mal eintritt gegeben durch die

Formel 46: $$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} d t$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{s}{a}} \frac{r . s}{\sqrt{2 m n a}}$$

Anmerkung 48. Die Formel 46 ist identisch mit der Formel 44, wenn man $r = a\varepsilon$ und $p = \frac{m}{s}$ setzt.

Gelöste Aufgaben,

anschliessend an die Abschnitte A, B, und C.

Aufgabe 264. Vom Jahre 1817 bis 1826 wurden in Frankreich 9656135 Kinder geboren, unter denen 4981566 Knaben waren. Welches ist der wahrscheinlichste Wert der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt?

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \log 4981566 &= 6{,}6973659 \\ \log 9656135 &= 6{,}9848034 \\ \log p &= 0{,}7125625-1 \\ & 0{,}5158965 \end{aligned}$$

Auflösung. Nach Frage 55 ist der wahrscheinlichste Wert p einer Hypothese x, wenn das Ereignis bei $(m+n)$ Versuchen m-mal eingetreten ist

$$p = \frac{m}{m+n},$$

also ergibt sich, da

$$m + n = 9656135$$
$$m = 4981566$$

ist,

$$p = \frac{4981566}{9656135} = 0{,}5158965$$

nach nebenstehender Rechnung.

Die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt ist also

$$q = 0{,}4841035,$$

so dass

$$p : q = 51 : 48 = 17 : 16$$

folgen würde.

Aufgabe 265. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert ω für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt nach obiger Aufgabe zwischen $0{,}5159 \pm 0{,}0005$ liegt?

Auflösung. Nach Formel 44 ist die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{t^2}\, dt$$

dafür, dass ω zwischen $p \pm \varepsilon$ liegt, wenn

$$\tau = \varepsilon \sqrt{\frac{s}{2pq}}$$

ist.

Da nun

$$\varepsilon = 0{,}0005$$

$$p = 0{,}5159 \qquad q = 0{,}4841$$

$$s = 9656135$$

ist, so hat man folgende Rechnung:

$$\left.\begin{array}{l} \log 2 = 0{,}3010300 \\ \log p = 0{,}7125655-1 \\ \log q = 0{,}6849351-1 \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{l} \ 0{,}6985306-1 \\ \log s = 6{,}9848094 \end{array}\right\} -$$

$$7{,}2862728$$

$$\left.\begin{array}{l} \log \sqrt{\dfrac{s}{2pq}} = 3{,}6431364 \\ \log \varepsilon = 0{,}6989700-4 \end{array}\right\} +$$

$$\log \tau = 0{,}3421064$$

$$\tau = 2{,}198$$

Nach Tabelle II ergibt sich

$$W = \Theta\,(2{,}20) = 0{,}9981371$$

Aufgabe 266. Unter 8 363 269 Geburten wurden 4 311 076 Knabengeburten beobachtet, welches ist der wahrscheinlichste Wert für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt und welches ist der wahrscheinliche Fehler der wahrscheinlichsten Hypothese?

Auflösung. Nach Frage 55 ist der Wert der wahrscheinlichsten Hypothese:

$$p = \frac{4311076}{8363269}$$

oder berechnet mit Logarithmen

$$\begin{aligned} \log 4311076 &= 6,6345857 \\ \log 8363269 &= 6,9223761 \\ \hline \log p &= 0,7122096-1 \end{aligned} \Bigg\} -$$

$$p = 0,515478$$
$$q = 0,484522$$

Für den wahrscheinlichen Fehler liefert dann Formel 45:

$$\rho = 0,476936 \sqrt{\frac{2\,p\,q}{s}}$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \log p &= 0,7122096-1 \\ \log q &= 0,6853135-1 \\ \log 2 &= 0,3010300 \\ \hline & \ 0,6985531-1 \\ \log s &= 6,9223761 \\ \hline & \ 0,7761770-8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{\frac{2\,p\,q}{s}} &= 0,3880885-4 \\ \log 0.476936 &= 0,6784601-1 \\ \hline \log \rho &= 0,0665486-4 \\ \rho &= 0,0001165 \end{aligned}$$

Man kann daher 1 gegen 1 wetten, dass die Wahrscheinlichkeit der Knabengeburt bei den beobachteten 8363269 Geburten zwischen

$$0,515478 + 0,000116 = 0,515594$$

und

$$0,515478 - 0,000116 = 0,515162$$

gelegen ist.

Aufgabe 267. Eine Münze wurde 1000-mal in die Höhe geworfen, wobei 592-mal Wappen und 408-mal Schrift auffiel. Welches ist der wahrscheinlichste Wert für die Wahrscheinlichkeit, dass Wappen auffällt und welches ist der wahrscheinliche Fehler dieser Hypothese?

Auflösung. Nach Frage 55 ergibt sich der wahrscheinlichste Wert der Wahrscheinlichkeit für das Auffallen von Wappen:

$$p = \frac{592}{1000} = 0,592$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Hypothese folgt nach Formel 45:

$$\rho = 0,476936 \sqrt{\frac{2\,p\,(1-p)}{s}}$$

wobei

$$p = 0,592 \qquad 1-p = 0,408$$
$$s = 1000$$

ist.

Also ergibt sich ρ durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,3010300 \\ \log p &= 0,7723217-1 \\ \log (1-p) &= 0,6106602-1 \\ \hline & \ 0,6840119-1 \\ \log s &= 3, \\ \hline & \ 0,6840119-4 \end{aligned}$$

$$\log \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}} = 0,3420059-2$$
$$\log 0,47\ldots = 0,6784601-1 \quad +$$
$$\log \rho = 0,0204660-2$$
$$\rho = 0,010482$$

Man kann daher 1 gegen 1 wetten, dass der wahre Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit zwischen

$$0,592 + 0,0105 = 0,6025$$

und

$$0,592 - 0,0105 = 0,5815$$

liegt.

Aufgabe 268. Von 15356 Häusern, welche bei einer Gesellschaft gegen Feuer versichert waren und gleichartig beschaffen sind, brannten in einem Jahre 28 ab, welches ist der wahrscheinlichste Wert der Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen eines solchen Hauses innerhalb eines Jahres, und welches ist der wahrscheinliche Fehler dieser Wahrscheinlichkeit?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen ergibt sich

$$p = \frac{28}{15356}$$

also da

$$\log 28 = 1,4471580$$
$$\log 15356 = 4,1862781 \quad -$$
$$\log p = 0,2608799-3$$

folgt

$$p = 0,0018233$$

Der wahrscheinliche Fehler in dieser Hypothese ist:

$$\rho = 0,476936 \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}$$

wobei

$$p = 0,0018233$$
$$1-p = 0,9981767$$
$$s = 15356$$

ist, also ergibt sich folgende Rechnung:

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log p = 0,2608799-3$$
$$\log (1-p) = 0,9992074-1$$
$$0,5611173-3$$
$$\log s = 4,1862781 \quad -$$
$$= 0,3748392-7$$
$$\log \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}} = 0,6874196-4$$
$$\log 0,47\ldots = 0,6784601-1 \quad +$$
$$\log \rho = 0,3658797-4$$
$$\rho = 0,0002322$$

Daher kann man 1 gegen 1 wetten, dass der wahre Wert der Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen zwischen

$$0{,}0018233 + 0{,}0002322 = 0{,}0020555$$

und

$$0{,}0018233 - 0{,}0002322 = 0{,}0015911$$

liegt.

Nimmt also die Versicherungsgesellschaft als Wahrscheinlichkeit für das Abbrennen eines Hauses 0,002 an zur Grundlage ihrer Rechnung, so ist sie sicherlich im Vorteil.

Aufgabe 269. Während der 10 Jahre vom Anfang 1817 bis Ende 1826 sind in Frankreich 9 656 135 Kinder geboren, darunter 4 981 566 Knaben, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wahre Wert der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt zwischen $0{,}515897 \pm 0{,}000672$ liegt?

Auflösung. Nach Aufgabe 264 ist der wahrscheinlichste Wert der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt

$$p = 0{,}515897$$

also liefert Formel 44 für die Wahrscheinlichkeit W, dass der wahre Wert der Wahrscheinlichkeit zwischen

$$p + 0{,}006662$$

und

$$p - 0{,}000672$$

liegt

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt$$

wobei

$$\tau = \varepsilon \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}$$

$$\varepsilon = 0{,}000672$$

$$s = 9656135$$

$$p = 0{,}515897$$

$$1 - p = 0{,}484103$$

ist. Es ergibt sich also

$$\log s = 6{,}9848034$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log p &= 0{,}7125625 - 1 \\ \log (1-p) &= \underline{0{,}6849378 - 1} \\ &\ 0{,}6985303 - 1 \end{aligned}$$

$$\log \frac{s}{2p(1-p)} = 7{,}2862731$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}} &= 3{,}6431365 \\ \log \varepsilon &= \underline{0{,}8273693 - 4} \; + \\ \log \tau &\ 0{,}4705058 \end{aligned}$$

also

$$\tau = 2{,}954$$

Die Tabelle II liefert nun

$$\Theta\ (2{,}95) = 0{,}9999698\,;$$

mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = 0{,}9999698$$

Aufgabe 270. Nach Aufgabe 269 wurden bei 9 656 135 Geburten 4 981 566 Knaben geboren. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 8 962 765 Geburten nicht mehr als 4 629 871 und nicht weniger als 4 617 825 Knaben geboren werden?

Auflösung. Man hat die Formel 46 zu benützen

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \frac{r\, s}{\sqrt{2\, m\, n\, a}}$$

wobei

$$s = 9656135$$
$$m = 4981566$$
$$n = 4674569$$
$$a = 8962765$$

und

$$r = 4629871 - \frac{a\, m}{s},$$

also nach nebenstehender Rechnung:

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{rl} \log a = & 6{,}9524410 \\ \log m = & 6{,}6973659 \\ \hline & 13{,}6498069 \\ \log s = & 6{,}9848034 \\ \hline & 6{,}6650035 \end{array} \quad \begin{array}{l} \} + \\ \\ \} - \end{array}$$

$$\frac{a\, m}{s} = 4623848$$

$$\begin{array}{rr} & 4629871 \\ \frac{a\, m}{s} = & 4623848 \\ \hline r = & 6023 \end{array} \quad \} -$$

Daher ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \log s^{3/2} = & 10{,}4772051 \\ \log r = & 3{,}7798129 \\ \hline & 14{,}2570180 \end{array} \quad \} +$$

$$\begin{array}{rl} \log a^2 = & 13{,}9048820 \\ \log m = & 6{,}6973659 \\ \log n = & 6{,}6697416 \\ \log 2 = & 0{,}3010300 \\ \hline & 27{,}5730195 \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2} \log 2\, a^2\, m\, n = 13{,}7865097$$

$$\begin{array}{rl} \log r\, s^{3/2} = & 14{,}2570180 \\ \tfrac{1}{2} \log 2\, a^2\, m\, n = & 13{,}7865097 \\ \hline \log \gamma = & 0{,}4705083 \end{array} \quad \} -$$

$$\gamma = 2{,}954$$

also da

$$\Theta\ (2{,}95) = 0{,}9999698$$

ist, folgt

$$W = 0{,}9999698.$$

Aufgabe 271. Eine Münze wurde 1000-mal in die Höhe geworfen, wobei 592-mal Wappen und 408-mal Schrift auffiel. Nun wollen zwei Personen A und B eins gegen eins wetten, dass bei 200 folgenden Würfen wenigstens $(117 - r)$-mal und höchstens $(117 + r)$-mal Wappen auffällt. Wie gross muss r angenommen werden? (Vergleiche die Aufgabe 244.)

Auflösung. Die Formel 46 liefert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis wenigstens $\left(a \frac{m}{m+n} - r\right)$-mal und höchstens $\left(a \frac{m}{m+n} + r\right)$-mal eintritt in der Form

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} d\,t$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{s}{a}} \frac{r\,s}{\sqrt{2\,m\,n\,a}}$$

und da

$$W = \frac{1}{2}$$

sein soll, so liefert die Tabelle II

$$\gamma = 0{,}47936$$

also

$$r = 0{,}476936 \frac{a}{s} \sqrt{\frac{2\,m\,n}{s}}$$

und da

$$a = 200 \qquad s = 1000$$

$$m = 592 \qquad n = 408$$

ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\log m &= 2{,}7723217 \\
\log n &= 2{,}6106602 \\
&\ \overline{5{,}6840119} \\
\log s &= 3, \qquad \} - \\
&\ \overline{2{,}6840119} \\
\log \sqrt{\frac{2\,m\,n}{s}} &= 1{,}3420059 \\
\log a &= 2{,}3010300 \\
\log s &= 3, \qquad \} - \\
&\ \overline{0{,}3010300-1} \\
\log 0{,}47\,.. &= 0{,}6806618-1 \qquad \} + \\
&\ \overline{0{,}9816918-1} \\
\log r &= 0{,}3236977
\end{aligned}$$

mithin

$$r = 2{,}172.$$

Wettet mithin A, dass bei 200 folgenden Würfen wenigstens 115-mal und höchstens 119-mal Wappen erscheint, so ist er etwas im Nachteil gegenüber B, wenn die Wette 1 gegen 1 geschieht.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 272. Vom Jahre 1866 bis Ende 1877 wurden in Österreich 8363269 lebende Kinder geboren. Von diesen waren 4311076 Knaben und 4052193 Mädchen. Welches ist der wahrscheinlichste Wert einer Knabengeburt während dieses 10jährigen Zeitraumes?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 264.

Aufgabe 273. Welches ist der wahrscheinliche Fehler der wahrscheinlichsten Hypothese in der obigen Aufgabe.

Aufgabe 274. Zwei Spieler spielen Wappen und Schrift. Nachdem sie die Münze 1568-mal geworfen haben finden sie, dass 834-mal Wappen und 734-mal Schrift aufgefallen ist. In welchem Verhältnisse müssen die Einsätze der beiden Spieler stehen, wenn sie ein billiges Spiel spielen wollen, und der eine auf das Auffallen von Wappen, der andere auf das Auffallen von Schrift wettet?

Andeutung. Man berechne nach Aufgabe 267 die Wahrscheinlichkeiten, worauf Formel 16 anzuwenden ist.

Aufgabe 275. Eine Versicherungsgesellschaft gegen Havarie hatte 5862 Schiffe versichert und es strandeten in einem Jahre 76 derselben. Welches ist der wahrscheinlichste Wert der Wahrscheinlichkeit für das Stranden eines Schiffes innerhalb eines Jahres, und welches ist der wahrscheinliche Fehler dieser Wahrscheinlichkeit?

Andeutung. Die Lösung ist analog der der Aufgabe 268.

Aufgabe 276. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wahre Wert der Wahrscheinlichkeit für das Stranden eines Schiffes während eines Jahres nach Aufgabe 275 zwischen $0{,}01296 \pm 0{,}00184$ liegt?

Andeutung. Man hat Formel 44 zu benutzen.

Aufgabe 277. Bei 8363269 Geburten wurden 4311076 Knaben geboren, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 9855950 Geburten höchstens 5092376 und wenigstens 5068658 Knaben geboren werden?

Andeutung. Nach Aufgabe 270 zu lösen.

Aufgabe 278. A und B haben eine Münze 2000-mal in die Höhe geworfen, wobei 1142-mal Schrift und 858-mal Wappen auffiel. Wie müssen sich die Einsätze beider verhalten, wenn sie nun wetten, dass bei den 100 folgenden Würfen und 2 mehr oder weniger oft als die wahrscheinlichste Anzahl von malen Schrift auffällt?

Aufgabe 279. Wie gross ist das r, um welches die Anzahl vom Malen des Auffallen von Schrift von der Maximalzahl verschieden sein muss, damit A und B (Aufgabe 278) eins gegen eins wetten können?

Andeutung. Vgl. Aufgabe 271.

Aufgaben über Zeugenaussagen.

(Anwendung findet hauptsächlich der Satz von Bayes Frage 41).

Aufgabe 280. In einer Urne sind n Nummern 1, 2 ... bis n. Es wird eine Nummer gezogen und ein Zeuge sagt aus, dass die Nummer i gezogen wurde. Welche Wahrscheinlichkeit besitzt diese Aussage?

Auflösung. Es können folgende vier Fälle eintreten, die unterschieden werden müssen:

1) Der Zeuge betrügt nicht und irrt nicht.
2) Der Zeuge betrügt nicht, irrt aber.
3) Der Zeuge betrügt und irrt nicht.
4) Der Zeuge betrügt und irrt.

Es sei nun p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeuge nicht betrügt, also $1 - p = p'$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er betrügt. Ferner sei r die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er nicht irrt, also $1 - r = r'$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er irrt.

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeiten für die obigen vier Fälle, die eintreten können, dann liefert der Satz von Bayes (Formel 30) die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

1) Die Wahrscheinlichkeit unter Annahme des ersten Falles setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden drei Ereignisse:

a) Dass der Zeuge nicht betrügt, wofür die Wahrscheinlichkeit p angenommen wurde.

b) Dass der Zeuge nicht irrt, wofür die Wahrscheinlichkeit r angenommen wurde und

c) dass die Nummer i wirklich gezogen worden ist, wofür sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ ergibt, da n Nummern in der Urne sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge in diesem Falle die Nummer i ansagt, ist also nach Formel 4:

$$w_1 = p \cdot r \cdot \frac{1}{n}$$

2) Die Wahrscheinlichkeit unter Annahme des zweiten Falles setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten folgender vier Ereignisse:

a) Dass der Zeuge nicht betrügt, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist gleich p.

b) Dass der Zeuge irrt, hiefür ist die Wahrscheinlichkeit gleich $r' = 1 - r$.

c) Dass irgend eine der $n - 1$ Nummern ausser i gezogen wurde, wofür sich die Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{n-1}{n}$$

ergibt.

d) Dass der Zeuge, indem er irrt, die gezogene Nummer für die Nummer i hält, wofür sich die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n-1}$$

ergibt, indem er unter $n - 1$ in der Urne verbliebenen Nummern gerade die Nummer i für seine Aussage wählt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge in diesem Falle die Nummer i ansagt, ist also

$$w_2 = p \,.\, r' \,.\, \frac{n-1}{n} \,.\, \frac{1}{n-1}$$

oder

$$w_2 = p\, r' \frac{1}{n}$$

3) Die Wahrscheinlichkeit unter Annahme des dritten Falles setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten folgender vier Ereignisse:

a) Dass der Zeuge betrügt, wofür die Wahrscheinlichkeit $p' = 1 - p$ ist.

b) Dass der Zeuge nicht irrt, wofür die Wahrscheinlichkeit r ist.

c) Dass irgend eine der $n - 1$ übrigen Nummern ausser i gezogen wurde, wofür sich die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n-1}{n}$$

ergibt und

d) dass der Zeuge zwar erkennt die Nummer, welche gezogen wurde, dass er aber, indem er betrügt gerade die Nummer i unter den $n - 1$ in der Urne verbliebenen Nummern wählt, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n-1}$$

sich ergibt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge in diesem Falle die Nummer i ansagt, ist also

$$w_3 = p' \,.\, r \,.\, \frac{n-1}{n} \,.\, \frac{1}{n-1}$$

oder

$$w_3 = p'\, r \frac{1}{n}$$

4) Bei der Annahme des vierten Falles müssen wir zwei Unterfälle betrachten:

α) Die Nummer i wurde **nicht gezogen.**

Dann ist die Wahrscheinlichkeit zusammengesetzt aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden vier Ereignisse:

a) Der Zeuge betrügt, hiefür ist die Wahrscheinlichkeit $p' = 1 - p$.

b) Der Zeuge irrt, hiefür ist die Wahrscheinlichkeit $r' = 1 - r$.

c) Die Nummer i wurde nicht gezogen, wofür sich die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n-1}{n}$$

ergibt.

d) Indem der Zeuge betrügt, sagt er nun statt der gezogenen Nummer die Nummer i an, die eine der $n-1$ in der Urne verbliebenen ist, und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er gerade die Nummer i wählt, ist

$$\frac{1}{n-1}$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit in diesem Falle:

$$w_4 = p' \cdot r' \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

oder

$$w_4 = p' r' \cdot \frac{1}{n}$$

β) Die Nummer i wurde **gezogen.**

Die Wahrscheinlichkeit setzt sich in diesem Falle zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten folgender vier Ereignisse:

a) Dass der Zeuge betrügt, hiefür ist die Wahrscheinlichkeit $p' = 1 - p$.

b) Dass der Zeuge irrt, hiefür ist die Wahrscheinlichkeit $r' = 1 - r$.

c) Dass die Nummer i gezogen wurde, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n}$$

ergibt.

d) Dass der Zeuge, indem er irrt, die Nummer i für eine andere Nummer hält, indem er aber betrügt statt der Nummer, die er zu sehen glaubt, unter den $n-1$ übrigen Nummern gerade die Nummer i angibt. Hiefür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$

Für diesen Fall ergibt sich also die Wahrscheinlichkeit

$$w_5 = p' \cdot r' \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

In den Fällen 1) und 4β) ist thatsächlich die Nummer i gezogen worden, während in den übrigen Fällen die Nummer i nicht gezogen wurde, obgleich es der Zeuge aussagt.

Erkl. 65. Setzt man $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \omega$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im 1. Fall die Zeugenaussage wahr ist $= \frac{w_1}{\omega}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Falle 4β) die Zeugenaussage wahr sei, ist dann $\frac{w_5}{\omega}$. Da nur im Falle 1) und 4β) sich die Aussage mit der Thatsache deckt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zeugenaussage wahr ist: $W = \frac{w_1}{\omega} + \frac{w_5}{\omega}$, wie nebenstehend angegeben wurde.

Die Wahrscheinlichkeit also, dass die Zeugenaussage wahr ist, ergibt sich nach dem Satze von Bayes

$$W = \frac{w_1 + w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5},$$

indem neben der Formel 30 auch noch der Satz über die Wahrscheinlichkeit benützt wurde, der in Frage 5 sich ausdrückt.

Setzt man die gefundenen Werte ein, so ergibt sich

$$W = \frac{\frac{pr}{n} + \frac{p'r'}{n(n-1)}}{\frac{pr}{n} + \frac{pr'}{n} + \frac{p'r}{n} + \frac{p'r'}{n} + \frac{p'r'}{n(n-1)}}$$

$$= \frac{pr + \frac{p'r'}{n-1}}{1 + \frac{p'r'}{n-1}}$$

wenn man beachtet, dass

$$pr + pr' + p'r + p'r' = (r + r')(p + p') = 1$$

ist.

Anmerkung 49. Ist n sehr gross, so wird W nahezu den Wert pr haben. Ist $r' = o$, d. h. irrt der Zeuge nie, so dass $r = 1$ ist, so ist $W = p$. Betrügt der Zeuge nicht, ist also $p = 1$ oder $p' = o$, so wird $W = r$.

Setzt man z. B. $n = 1000$ und $p = r = 0{,}999$, d. h. nimmt man an, dass bei 1000 Aussagen nur eine betrügerisch oder irrig ist, so wird

$$W = \frac{0{,}998001 + 0{,}000000001}{1 + 0{,}000000001} = 0{,}998001$$

Aufgabe 281. Eine Urne enthält $n - 1$ schwarze und 1 blaue Kugel. Es wird eine Kugel gezogen und ein Zeuge der Ziehung sagt aus, die gezogene Kugel sei blau. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zeugenaussage wahr ist?

Erkl. 66. Ist n sehr gross, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die blaue Kugel gezogen wird, sehr klein, nämlich $\frac{1}{n}$. Ein Ereignis, für dessen Eintritt eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit sich ergibt, heisst, wenn es eintritt, ein ungewöhnliches Ereignis. So dass das Ziehen der blauen Kugel bei grossem n ein ungewöhnliches Ereignis ist.

Auflösung. Wir behalten dieselben Bezeichnungen, wie in Aufgabe 280 bei und unterscheiden wieder dieselben vier Fälle.

1) Die Wahrscheinlichkeit w_1 der Zeugenaussage, dass die blaue Kugel gezogen wurde, setzt sich zusammen aus der Wahrscheinlichkeit folgender drei Ereignisse:

a) Der Zeuge betrügt nicht, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist p.

b) Der Zeuge irrt nicht, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist r.

c) Die blaue Kugel wurde gezogen, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $\frac{1}{n}$

Also ist

$$w_1 = p \,.\, r \,.\, \frac{1}{n}$$

2) Die Wahrscheinlichkeit w_2 der Zeugenaussage, dass die blaue Kugel gezogen wurde, setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden drei Ereignisse:

a) Der Zeuge betrügt nicht, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist p.

b) Der Zeuge irrt, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $r' = 1 - r$.

c) Es wurde eine schwarze Kugel gezogen, die der Zeuge, indem er irrt, für die blaue hält. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel ist aber

$$\frac{n-1}{n}$$

so dass

$$w_2 = p \cdot r' \cdot \frac{n-1}{n}$$

ist.

3) Die Wahrscheinlichkeit w_3 der Zeugenaussage, dass die blaue Kugel gezogen wurde, setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden drei Ereignisse:

a) Der Zeuge betrügt, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $p' = 1 - p$.

b) Der Zeuge irrt nicht, wofür die Wahrscheinlichkeit r ist.

c) Es wurde eine schwarze Kugel gezogen, die der Zeuge als schwarz erkennt, indem er aber betrügt, sagt er die blaue Kugel an. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel ist

$$\frac{n-1}{n}$$

so dass sich

$$w_3 = p' \cdot r \cdot \frac{n-1}{n}$$

ergibt.

4) Die Wahrscheinlichkeit w_4 der Zeugenaussage, dass die blaue Kugel gezogen wurde, setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden drei Ereignisse:

a) Der Zeuge betrügt, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $p' = 1 - p$.

b) Der Zeuge irrt, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $r' = 1 - r$.

c) Es wurde die blaue Kugel gezogen, die der Zeuge, indem er irrt, für schwarz hält und indem er betrügt sie als blau angibt. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der blauen Kugel ist

$$\frac{1}{n}$$

also ergibt sich

$$w_4 = p' \cdot r' \cdot \frac{1}{n}$$

Da nur in den Fällen 1) und 4) die Zeugenaussage mit der Thatsache übereinstimmt, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit der Zeugenaussage nach dem Satze von Bayes:

$$W = \frac{w_1 + w_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}$$

also, wenn die Werte eingesetzt werden

$$W = \frac{\frac{pr}{n} + \frac{p'r'}{n}}{\frac{pr}{n} + \frac{pr'(n-1)}{n} + \frac{p'r(n-1)}{n} + \frac{p'r'}{n}}$$

$$= \frac{pr + p'r'}{pr + p'r' + (pr' + p'r)(n-1)}$$

Erkl. 67. Der Zeuge sagt eine wahre Thatsache aus, wenn er nicht irrt und nicht betrügt, oder, wenn er irrt und betrügt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er also eine wahre Thatsache aussagt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die beiden Fälle, also gleich $pr + p'r'$.

Setzt man

$$pr + p'r' = q$$

so ist q die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeuge eine wahre Thatsache aussagt. (Vergleiche die nebenstehende Erklärung 67.)

Da nun

$$(p + p')(r + r') = 1$$

ist, so folgt

$$pr' + p'r = 1 - (pr + p'r')$$
$$= 1 - q = q'$$

und daher wird

$$W = \frac{q}{q + q'(n-1)} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{q}{q'(n-1)}}$$

Anmerkung 50. Je grösser n wird, desto kleiner wird W, so dass ein ungewöhnliches Ereignis, durch einen Zeugen ausgesagt, eine kleine Wahrscheinlichkeit besitzt, dass die Zeugenaussage der Thatsache entspricht. Nimmt man wieder $n = 1000$ und $p = r = 0{,}999$ an, so dass $pr + p'r' = q = 0{,}998011$ wird, so folgt

$$\frac{q}{q'(n-1)} = \frac{0{,}998011}{0{,}001998 \,.\, 999} = 0{,}5$$

also $W = 1 - \frac{10}{15} = \frac{1}{3}$, also wesentlich kleiner als in Anmerkung 49 sich ergab; das Ereignis der Aufgabe 280 war ein gewöhnliches, das Ereignis der Aufgabe 281 ein aussergewöhnliches.

Aufgabe 282. Eine Urne U_1 enthält n schwarze, eine zweite Urne U_2 enthält ebenso n blaue Kugeln. Aus einer der Urnen wird eine Kugel gezogen und in die andere gelegt, worauf aus dieser eine Kugel gezogen wird. Ein Zeuge der ersten Ziehung behauptet die gezogene Kugel sei blau, ein Zeuge der zweiten Ziehung behauptet dasselbe. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass thatsächlich in beiden Ziehungen eine blaue Kugel gezogen wurde?

Auflösung. Wir haben hier vier Fälle zu unterscheiden.

1) Beide Zeugen sagen wahr aus. Die Wahrscheinlichkeit w_1, dass beide Zeugen eine blaue Kugel als gezogen melden, ist zusammengesetzt aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden vier Ereignisse:

a) Dass der erste Zeuge eine wahre Thatsache aussagt. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$q_1 = p_1 r_1 + p_1' r_1'.$$

(Vergleiche die Erklärung 67.)

b) Dass auch der zweite Zeuge eine wahre Thatsache aussagt. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$q_2 = p_2 r_2 + p_2' r_2'.$$

c) Dass der erste Zug aus U_2 geschah, denn diese Urne enthält vorerst allein blaue Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $\frac{1}{2}$, da der Zug gleich möglich aus U_1 oder U_2 ist.

d) Dass bei dem zweiten Zuge, der aus U_1 gemacht wird, die blaue Kugel gezogen wird, die eben hineingelegt wurde. Hiefür ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n+1}$$

so dass

$$w_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

wird.

2) Der erste Zeuge sagt wahr aus, der zweite sagt unwahr aus. Die Wahrscheinlichkeit w_2, dass beide Zeugen unter dieser Annahme eine blaue Kugel angeben setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden vier Ereignisse:

a) Dass der erste Zeuge wahr aussagt, wofür die Wahrscheinlichkeit q_1 sich ergab.

b) Dass der zweite Zeuge unwahr aussagt, wofür sich die Wahrscheinlichkeit $q_2' = 1 - q_2$ ergibt.

c) Dass der erste Zug aus U_2 geschah, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist.

d) Dass sodann aus U_1 eine schwarze Kugel gezogen wird, die der zweite Zeuge, indem er unwahres aussagt als blau bezeichnet. Für das Ziehen einer schwarzen Kugel aus U_1 ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n}{n+1},$$

nachdem in die Urne U_1 die blaue Kugel aus U_2 gelegt wurde. Es folgt daher

$$w_2 = q_1 \cdot q_2' \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

3) Der erste Zeuge sagt unwahr aus, der zweite Zeuge sagt wahr aus. Die Wahrscheinlichkeit w_3, dass beide Zeugen eine blaue Kugel ansagen, setzt sich aus den Wahrscheinlichkeiten folgender vier Ereignisse zusammen:

a) Dass der erste Zeuge unwahr aussagt, wofür die Wahrscheinlichkeit $q_1' = 1 - q_1$ ist.

b) Dass der zweite Zeuge wahr aussagt, wofür die Wahrscheinlichkeit q_2 ist.

c) Dass die erste Ziehung aus U_1 geschieht, indem eine schwarze Kugel gezogen wird, die der Zeuge als blau ansagt. Die Wahrscheinlichkeit ist wieder $\frac{1}{2}$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



865. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dritter Teil. Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen. Forts. v. Heft 852. — Seite 257—272.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 852. — Seite 257—272.

Inhalt:

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht ve[illegible] en mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Be[illegible] s-zweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihe[illegible] nd somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen g[illegible] n

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktisch[illegible] f-gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der [illegible] n verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verf[illegible] r, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren F[illegible] g thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshan[illegible]**

d) Dass bei dem zweiten Zuge aus U_2 eine blaue Kugel gezogen wird, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n}{n+1}$$

sich ergibt.

Es ist mithin

$$w_3 = q_1' \cdot q_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

4) Beide Zeugen sagen unwahr aus. Die Wahrscheinlichkeit w_4, dass beide eine blaue Kugel ansagen, setzt sich aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden vier Ereignisse zusammen:

a) Dass der erste Zeuge unwahr aussagt. Die Wahrscheinlichkeit ist $q_1' = 1 - q_1$.

b) Dass der zweite Zeuge unwahr aussagt. Die Wahrscheinlichkeit ist $q_2' = 1 - q_2$.

c) Dass die erste Ziehung aus U_1 geschah, indem eine schwarze Kugel gezogen wird, die der erste Zeuge blau ansagt. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$

d) Dass bei dem zweiten Zug aus U_2 die schwarze Kugel gezogen wird, die nach dem ersten Zug aus U_1 in U_2 gelegt wurde, die dann der zweite Zeuge als blau ansagt. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$\frac{1}{n+1}$$

und es ergibt sich daher

$$w_4 = q_1' \cdot q_2' \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

Da nur im Falle 1) thatsächlich sowohl im ersten als zweiten Zuge eine blaue Kugel gezogen wurde, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses nach dem Satz von Bayes:

$$W = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}$$

oder wenn die Werte eingesetzt werden:

$$W = \frac{\frac{q_1 q_2}{2(n+1)}}{\frac{q_1 q_2}{2(n+1)} + \frac{q_1 q'_2 n}{2(n+1)} + \frac{q'_1 q_2 n}{2(n+1)} + \frac{q'_1 q'_2}{2(n+1)}}$$

oder

$$W = \frac{q_1 q_2}{q_1 q_2 + q'_1 q'_2 + n(q_1 q'_2 + q'_1 q_2)}$$

Mit wachsendem n wird W abnehmen.

Anmerkung 51. Ist $q_1 = q_2 = \frac{1}{2} = q_1' = q_2'$, ist es also ebenso wahrscheinlich, dass jeder der Zeugen wahr aussagt, als dass er nicht wahr aussagt, so ergibt sich $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$ gleich der a priori berechneten Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer blauen Kugel in beiden Ziehungen. (Vergleiche Aufgabe 201.)

Aufgabe 283. Aus einer Urne, die n Nummern enthält, wird eine Nummer gezogen. Zwei Zeugen der Ziehung sagen aus, es sei die Nummer i gezogen worden, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nummer i gezogen wurde?

Auflösung. Wir machen folgende vier Annahmen, die in Bezug auf das Irren und Nichtirren der Zeugen zulässig sind:

1) Keiner der Zeugen irrt, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist: $r_1 r_2$.

Bei dieser Annahme kann

a) die Nummer i gezogen werden,

b) die Nummer i nicht gezogen werden.

Im Falle a) müssen beide Zeugen nicht betrügen, da sie beide die Nummer i, die wirklich gezogen wurde, und die sie, da sie nicht irren, auch als i erkennen, ansagen.

Die Wahrscheinlichkeit w_1 dafür, dass beide Zeugen also unter diesen Annahmen die Nummer i ansagen, ist zusammengesetzt aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

Dass beide Zeugen nicht irren, dass beide Zeugen nicht betrügen, dass die Nummer i von den n Nummern gezogen wurde. Daher ist:

$$w_1 = r_1 r_2 p_1 p_2 \frac{1}{n}$$

b) Macht man die Annahme b), dass i nicht gezogen wurde, so müssen beide Zeugen betrügen, indem sie an Stelle der gezogenen Nummer die Nummer i ansagen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nummer i nicht gezogen wird, ist $\frac{n-1}{n}$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Zeugen auf die Nummer i unter den $n-1$ übrigen Nummern der Urne verfallen, ist $\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}$ nach Formel 4.

Die Wahrscheinlichkeit w_2 setzt sich also zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Dass beide Zeugen nicht irren, dass beide Zeugen betrügen, dass die Nummer i nicht gezogen wurde, und dass beide Zeugen gerade die Nummer i ansagen; daher ist

$$w_2 = r_1 r_2 p_1' p_2' \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}$$

2) Der erste Zeuge irrt, der zweite Zeuge irrt nicht.

a) Die Nummer i wurde gezogen. Dann muss der erste Zeuge betrügen, denn er hält die Nummer i für eine andere, da er irrt, indem er aber i ansagt, betrügt er. Der zweite Zeuge betrügt nicht.

Die Wahrscheinlichkeit w_3, dass beide Zeugen die Nummer i ansagen, setzt sich also zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Dass der erste Zeuge irrt und betrügt, dass der zweite Zeuge nicht irrt und nicht betrügt, dass die Nummer i gezogen wurde, und dass der erste Zeuge, indem er irrt und betrügt unter den $n-1$ Nummern, die er nicht gezogen glaubt, gerade die Nummer i zur Aussage wählt.

Es ist mithin:

$$w_3 = r_1' p_1' r_2 p_2 \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

b) Die Nummer i wurde nicht gezogen. Dann betrügt der zweite Zeuge, da er nicht irrt, während der erste nicht betrügt, da er irrt, also die gezogene Nummer für i hält.

Die Wahrscheinlichkeit w_4 setzt sich also zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Dass der erste Zeuge irrt, aber nicht betrügt, dass der zweite Zeuge nicht irrt, aber betrügt, dass die Nummer i nicht gezogen wurde, dass der erste Zeuge gerade die Nummer i unter den $n-1$ nicht gezogen, als die gezogene Nummer vermutet, dass der zweite Zeuge, indem er betrügt, gerade die Nummer i als die gezogene angibt.

Es ist mithin:

$$w_4 = r_1' p_1 r_2 p_2' \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}$$

3) Der erste Zeuge irrt nicht, wohl aber der zweite Zeuge.

a) Die Nummer i wird gezogen. Der erste Zeuge betrügt nicht, indem er nicht irrt und die Nummer richtig angibt. Der zweite Zeuge irrt, hält also die gezogene Nummer nicht für richtig, betrügt aber und gibt i an.

Die Wahrscheinlichkeit w_5, dass also beide Zeugen die Nummer i angeben, setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

Dass der erste Zeuge nicht irrt und nicht betrügt, dass der zweite Zeuge irrt und betrügt, dass die Nummer i gezogen wurde, und dass der zweite Zeuge, indem er betrügt, an Stelle der von ihm gezogen geglaubten Nummer gerade die Nummer i unter den $n-1$ übrigen angibt.

Es ist also

$$w_5 = r_1 p_1 r_2' p_2' \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

b) Die Nummer i wurde nicht gezogen.

Dann muss der erste Zeuge betrügen, denn er irrt nicht, während der zweite Zeuge irrt, also die gezogene Nummer für i hält, mithin betrügt er nicht.

Die Wahrscheinlichkeit w_6 ergibt sich also aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

Dass der erste Zeuge nicht irrt aber betrügt, dass der zweite Zeuge irrt aber nicht betrügt, dass die Nummer i nicht gezogen wurde, dass der erste Zeuge, indem er betrügt, gerade die Nummer i von den $n-1$ nicht gezogenen Nummern als gezogen angibt, und schliesslich, dass der zweite Zeuge, indem er betrügt, gerade die Nummer i unter den $n-1$ nicht gezogenen auswählt, für seine Aussage.

Daher ist

$$w_6 = r_1 p_1' r_2' p_2 \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}$$

4) Beide Zeugen irren.

a) Die Nummer i wurde gezogen.

Dann müssen beide Zeugen betrügen; denn sie glauben die gezogene Nummer sei nicht i, indem sie beide irren, geben aber trotzdem i als gezogen an.

Die Wahrscheinlichkeit w_7 also, dass beide Zeugen die Nummer i als gezogen angeben, setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

Dass beide Zeugen irren und betrügen, dass die Nummer i gezogen wurde, und dass beide Zeugen, indem sie i nicht gezogen glauben, gerade i unter den $n-1$ übrigen Nummern, die sie noch in der Urne vermuten, zur Aussage wählen. Dem letzteren Ereignisse kommt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}$ zu.

Es wird mithin

$$w_7 = r_1' r_2' p_1' p_2' \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}$$

b) Die Nummer i ist nicht gezogen.

Da beide Zeugen irren, so betrügen sie nicht.

Die Wahrscheinlichkeit w_8 dafür, dass beide Zeugen nun i als gezogen angeben, setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

Dass beide Zeugen irren, dass beide nicht betrügen, dass die Nummer i nicht gezogen wurde, dass beide Zeugen die gezogene Nummer für i halten.

Es ist also

$$w_8 = r_1' r_2' p_1 p_2 \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Hiemit sind alle Möglichkeiten erschöpft und es sind w_1, w_3, w_5, w_7 die Wahrscheinlichkeiten für die Fälle, in denen sich die Aussagen mit der Thatsache decken, während in den übrigen Fällen die Zeugen eine unwahre Aussage machen.

Nach dem Satze von Bayes wird daher die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zeugen eine wahre Thatsache bezeugen, oder dass die Nummer i gezogen wurde:

$$W = \frac{w_1 + w_3 + w_5 + w_7}{w_1 + w_3 + w_5 + w_7 + w_2 + w_4 + w_6 + w_8}$$

nun ist:

$$w_1 = r_1 r_2 p_1 p_2 \frac{1}{n}$$

$$w_3 = r'_1 r_2 p'_1 p_2 \frac{1}{n(n-1)}$$

$$w_5 = r_1 r'_2 p_1 p'_2 \frac{1}{n(n-1)}$$

$$w_7 = r'_1 r'_2 p'_1 p'_2 \frac{1}{n(n-1)^2}$$

also

$$\begin{aligned} w_1 + w_3 + w_5 + w_7 &= \frac{1}{n} r_2 p_2 \left[r_1 p_1 + \frac{r'_1 p'_1}{n-1} \right] \\ &+ \frac{1}{n(n-1)} r'_2 p'_2 \left[r_1 p_1 + \frac{r'_1 p'_1}{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[r_1 p_1 + \frac{r'_1 p'_1}{n-1} \right] \left[r_2 p_2 + \frac{r'_2 p'_2}{n-1} \right] \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich aus

$$w_2 = r_1 r_2 p'_1 p'_2 \frac{1}{n(n-1)}$$

$$w_4 = r'_1 r_2 p_1 p'_2 \frac{1}{n(n-1)}$$

$$w_6 = r_1 r'_2 p'_1 p_2 \frac{1}{n(n-1)}$$

$$w_8 = r'_1 r'_2 p_1 p_2 \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\begin{aligned} w_2 + w_4 + w_6 + w_8 &= \frac{1}{n(n-1)} r_2 p'_2 [r_1 p'_1 + r'_1 p_1] \\ &+ \frac{1}{n(n-1)} r'_2 p_2 [r_1 p'_1 + r'_1 p_1] \\ &= \frac{1}{n(n-1)} [r_1 p'_1 + r'_1 p_1][r_2 p'_2 + r'_2 p_2] \end{aligned}$$

und mithin wird:

$$W = \frac{\left[r_1 p_1 + \frac{r'_1 p'_1}{n-1} \right] \left[r_2 p_2 + \frac{r'_2 p'_2}{n-1} \right]}{\left[r_1 p_1 + \frac{r'_1 p'_1}{n-1} \right] \left[r_2 p_2 + \frac{r'_2 p'_2}{n-1} \right] + \frac{1}{n-1} \left[r_1 p'_1 + r'_1 p_1 \right] \left[r_2 p'_2 + r'_2 p_2 \right]}$$

Setzt man

$$r_1 p'_1 + r'_1 p_1 = 1 - q_1 = q'_1$$

$$r_2 p'_2 + r'_2 p_2 = 1 - q_2 = q'_2,$$

so dass also $q_1' q_2'$ die Wahrscheinlichkeiten

dafür sind, dass die beiden Zeugen unwahre Aussagen machen, so wird

$$W = \frac{\left[r_1 p_1 + \frac{r'_1 p'_1}{n-1}\right] \cdot \left[r_2 p_2 + \frac{r'_2 p'_2}{n-1}\right]}{\left[r_1 p_1 + \frac{r'_1 p'_1}{n-1}\right] \cdot \left[r_2 p_2 + \frac{r'_2 p'_2}{n-1}\right] + \frac{q'_1 q'_2}{n-1}}$$

Wird vorausgesetzt, dass keiner der beiden Zeugen irrt, so dass $r_1' = r_2' = 0$, $r_1 = r_2 = 1$ ist, so wird $q_1' = p_1'$, $q_2' = p_2'$ und W übergeht in

$$W' = \frac{p_1\ p_2}{p_1\ p_2 + \frac{p'_1\ p'_2}{n-1}}$$

Wird vorausgesetzt, dass keiner der Zeugen betrügt, dass also $p_1' = p_2' = 0$, $p_1 = p_2 = 1$ ist, also $q_1' = r_1'$, $q_2' = r_2'$ wird, so übergeht W in

$$W'' = \frac{r_1\ r_2}{r_1\ r_2 + \frac{r'_1\ r'_2}{n-1}}$$

Wird vorausgesetzt, dass beide Zeugen gleich glaubwürdig sind, und dass beide in derselben Art dem Irrtum unterworfen sind, so dass also $p_1 = p_2 = p$, $r_1 = r_2 = r$ ist, so wird die Wahrscheinlichkeit W, dass das von beiden ausgesagte Ereignis wahr sei, gegeben durch

$$W = \frac{\left[r p + \frac{r'\ p'}{n-1}\right]^2}{\left[r\ p + \frac{r'\ p'}{n-1}\right]^2 + \frac{q'^2}{n-1}}$$

Ist $n = 2$, d. h. handelt es sich um ein Ereignis, das ebenso wahrscheinlich eintritt als nicht eintritt, dessen Wahrscheinlichkeit eben $\frac{1}{2}$ ist, so wird, wenn beide Zeugen gleich glaubwürdig sind:

$$W = \frac{q^2}{q^2 + q'^2}$$

wobei q die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der Zeuge ein wahres Ereignis aussagt.

Anmerkung 52. Wir fanden für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis wirklich eingetreten, wenn es durch einen Zeugen ausgesagt wurde, in Aufgabe 281

$$W_1 = \frac{q}{q + q'\ (n-1)}$$

also für $n = 2$

$$W_1 = \frac{q}{q + q'} = q$$

und da

$$W_2 = \frac{q^2}{q^2 + q'^2}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass das Ereignis stattfand, wenn zwei gleich glaubwürdige Zeugen aussagen, so ersieht man, dass

$$W_2 > W_1$$

sobald man voraussetzt, dass $q > \frac{1}{2}$ ist, d. h.: es ist wahrscheinlicher, dass die Zeugen eine wahre Thatsache aussagen, als dass sie das Gegenteil thun. Denn setzt man $q = \frac{1}{2} + \varepsilon$, wobei $o < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ist, so wird

$$W_2 - W_1 = \frac{q^2 - q^3 - q(1-q)^2}{q^2 + q'^2} = \frac{3q^2 - 2q^3 - q}{q^2 + q'^2} = \frac{q(3q - 2q^2 - 1)}{q^2 + q'^2} = \frac{q(1-2\varepsilon)\varepsilon}{q^2 + q'^2}$$

also ist $W_2 - W_1 > 0$, da $1 - 2\varepsilon > 0$ ist.

Aufgabe 284. In einer Urne sind n Nummern, zwei einer Ziehung beiwohnende Zeugen sagen aus, dass die Nummer i nicht gezogen wurde, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nummer i gezogen wurde, wenn Irrtum bei den Zeugen ausgeschlossen wird?

Auflösung. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1) Die Nummer i wurde nicht gezogen. Dann betrügen beide Zeugen nicht, denn sie irren nicht, und sagen, dass i nicht gezogen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit w_1 ist also zusammengesetzt aus der Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

Dass beide Zeugen nicht betrügen, und dass i nicht gezogen wurde, also ist

$$w_1 = p_1 p_2 \cdot \frac{n-1}{n}$$

2) Es wurde i gezogen. Dann müssen beide Zeugen betrügen, da sie nicht irren.

Die Wahrscheinlichkeit w_2, dass beide Zeugen aussagen, dass i nicht gezogen wurde, ist also

$$w_2 = p_1' p_2' \frac{1}{n}$$

Mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass die Nummer i gezogen wurde, nach dem Satze von Bayes

$$W = \frac{w_2}{w_1 + w_2}$$

also

$$W = \frac{p'_1 p'_2}{p'_1 p'_2 + p_1 p_2 (n-1)}$$

oder

$$W = \frac{\frac{p'_1 p'_2}{n-1}}{p_1 p_2 + \frac{p'_1 p'_2}{n-1}}$$

wie es sein muss, indem diese Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit W' in Aufgabe 283 entgegengesetzt ist, also

$$W + W' = 1$$

ist.

Aufgabe 285. Eine Urne enthält $a+b$ Kugeln, a weisse und b schwarze. Es wird eine Kugel gezogen. Von $m+n$ der Ziehung beiwohnenden Zeugen behaupten m, dass die gezogene Kugel weiss und n, dass die gezogene Kugel schwarz war. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Kugel wirklich weiss war?

Erkl. 68. Es wird vorausgesetzt, dass alle Zeugen gleichmässig dem Irrtum unterworfen sind und dass bei allen die Wahrscheinlichkeit zu betrügen gleich angenommen wird.

Auflösung. Wir bezeichnen mit ω die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel, also

$$\omega = \frac{a}{a+b} \text{ und } \omega' = \frac{b}{a+b}$$

so dass ω' die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel ist.

Es bedeute ferner

$$q = pr + p'r'$$

die Wahrscheinlichkeit für einen der Zeugen eine wahre Thatsache auszusagen, also

$$q' = 1 - q = p'r + pr'$$

die Wahrscheinlichkeit eine falsche Aussage zu machen.

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

1) Es wurde eine weisse Kugel gezogen.

Dann sagen die m ersten Zeugen eine wahre Thatsache aus, die n andern eine unwahre Thatsache, also ist die Wahrscheinlichkeit w_1 dafür, dass die m Zeugen eine weisse, die n Zeugen eine schwarze Kugel gezogen angeben nach Formel 8

$$w_1 = \binom{m+n}{m} q^m q'^n \omega$$

2) Es wurde eine schwarze Kugel gezogen.

Dann sagen die m ersten Zeugen eine unwahre Thatsache aus und die n letzten eine wahre Thatsache. Es wird also die Wahrscheinlichkeit w_2, dass in diesem Falle die m ersten Zeugen eine weisse Kugel, die n andern eine schwarze Kugel angeben:

$$w_2 = \binom{m+n}{n} q'^m q^n \omega'$$

Die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass also eine weisse Kugel gezogen wird, ist nach dem Satze von Bayes

$$W = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$$

oder

$$W = \frac{q^m q' \ \omega}{q^m q'^n \omega + q'^m q^n \omega'} \quad \ldots\ldots (1)$$

Ist $\omega = \omega' = \frac{1}{2}$, also das Ereignis ebenso wahrscheinlich, wie sein Gegenpart, so wird

$$W = \frac{q^m q'^n}{q^m q'^n + q'^m q^n} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ist $n = 0$, d. h. sagen alle Zeugen aus, dass eine weisse Kugel gezogen wurde, so ist

$$W = \frac{\omega q^m}{\omega q^m + \omega' q'^m} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

Ist bei allen Zeugen Irrtum ausgeschlossen, also

$$r' = 0 \qquad r = 1$$

so wird

$$W = \frac{\omega p^m p'^n}{\omega p^m p'^n + \omega' p'^m p^n} \quad \ldots \ldots (4)$$

Ist Betrug ausgeschlossen, also

$$p' = 0 \qquad p = 1$$

so wird

$$W = \frac{\omega r^m r'^n}{\omega r^m r'^n + \omega' r'^m r^n} \quad \ldots \ldots (5)$$

Ist sowohl Irrtum als Betrug ausgeschlossen, so wird

$$W = \frac{\omega}{\omega + \omega'} = \omega$$

wie es sein muss.

Die Gleichung (1) kann man auch schreiben

$$W = \frac{1}{1 + \frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{q'}{q}\right)^{m-n}}$$

Ist nun $m > n$ und $q' < q$, d. h. sagen die Zeugen eher eine wahre Thatsache aus als sie es nicht thun, so wird mit wachsender Differenz $m - n$ auch W wachsen, indem der Nenner abnimmt. In diesem Falle wird also die Thatsache wahrscheinlicher durch mehr Zeugenaussagen.

Ist aber $q' > q$, d. h. sagen die Zeugen wahrscheinlicher eine falsche Thatsache aus als eine wahre, dann wird mit wachsender Differenz $m - n$ die Wahrscheinlichkeit W abnehmen.

Ist $m = n$, sagen also ebenso viele Zeugen aus, dass eine weisse Kugel, als dass eine schwarze Kugel gezogen wurde, so wird

$$W = \frac{1}{1 + \frac{\omega'}{\omega}} = \omega,$$

gleich der Wahrscheinlichkeit a priori des Ereignisses. Was auch daraus klar wird, dass gleichviele gleich glaubwürdige Zeugen das Ereignis bestätigen und in Abrede stellen.

Aufgabe 286. Aus einer Urne, die n Nummern enthält, wird eine Nummer gezogen. Ein der Ziehung beiwohnender Zeuge sagt aus, dass die Nummer i gezogen wurde. Durch Überlieferung wird das Ereignis von $z - 1$ weiteren Zeugen bestätigt, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nummer i wirklich gezogen wurde?

Auflösung. Es sei w_k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der k^{te} Zeuge eine wahre Thatsache aussagt.

Dann ist w_k die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten, dass der k^{te} Zeuge wahr spricht oder betrügt.

1) Der k^{te} Zeuge betrügt nicht, hiefür sei p_k die Wahrscheinlichkeit, da w_{k-1} die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der $(k-1)^{te}$ Zeuge eine wahre Thatsache aussagte, so ist

$$p_k \, w_{k-1}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Falle der k^{te} Zeuge die Nummer i als gezogen angibt.

2) Der k^{te} Zeuge betrügt, hiefür ist $(1 - p_k)$ die Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit, dass nun der k^{te} Zeuge doch die Nummer i als gezogen angibt, setzt sich nun zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

Dass der k^{te} Zeuge betrügt, dass der $(k-1)^{te}$ Zeuge betrügt, also eine andere als die Nummer i dem k^{ten} Zeugen bezeichnet, und dass der k^{te} Zeuge, indem er lügt, gerade die Nummer i unter den $n - 1$ übrigen Nummern für seine Aussage wählt.

Es ist also

$$(1 - p_k)(1 - w_{k-1}) \frac{1}{n-1}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Falle der k^{te} Zeuge die Nummer i als gezogen angibt.

Also ist

$$w_k = p_k \; w_{k-1} + \frac{(1-p_k)(1-w_{k-1})}{n-1}$$

oder durch eine leichte Umformung.

$$w_k - \frac{1}{n} = \frac{n\,p_k - 1}{n-1} \left(w_{k-1} - \frac{1}{n}\right)$$

Nun ist offenbar $w_1 = q_1 = p_1 r_1 + \frac{p_1' r_1'}{n-1}$ gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der erste Zeuge eine wahre Thatsache aussagt. Mithin erhält man folgende Reihe von Gleichungen, wenn man der Reihe nach

$$k = 2, 3, 4 \ldots n$$

setzt:

$$w_2 - \frac{1}{n} = \frac{n\,p_2 - 1}{n-1}\left(q_1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$w_3 - \frac{1}{n} = \frac{n\,p_3 - 1}{n-1}\left(w_2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$w_4 - \frac{1}{n} = \frac{n p_4 - 1}{n-1}\left(w_3 - \frac{1}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$w_z - \frac{1}{n} = \frac{n p_z - 1}{n-1}\left(w_{z-1} - \frac{1}{n}\right)$$

Multipliciert man die Gleichungen mit einander, so folgt:

$$w_z - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n q_1 - 1)(n p_2 - 1)(n p_3 - 1)\ldots(n p_z - 1)}{(n-1)^z}$$

also

$$w_z = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n q_1 - 1)(n p_2 - 1)\ldots(n p_z - 1)}{(n-1)^z} \ldots\ldots\ldots (1)$$

oder auch

$$w_z = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\left(q_1 - \frac{q'_1}{n-1}\right)\left(p_2 - \frac{p'_2}{n-1}\right)\left(p_3 - \frac{p'_3}{n-1}\right)\ldots\left(p_z - \frac{p'_z}{n-1}\right) \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ist n sehr gross, so wird w_z übergehen in

$$w_z = \frac{1}{n} + q_1 p_2 p_3 \ldots p_z$$

oder nahezu in

$$q_1 p_2 p_3 \ldots p_z.$$

Für $n = 2$, wenn also das Ereignis ebenso wahrscheinlich eintritt als es nicht eintritt, wird

$$w_z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 q_1 - 1)(2 p_2 - 1)\ldots(2 p_z - 1) \ldots\ldots\ldots (3)$$

Wird überdiess vorausgesetzt, dass bei dem ersten Zeugen Irrtum ausgeschlossen ist, und dass alle Zeugen gleich glaubwürdig sind, also

$$q_1 = p = p_1 = p_2 \ldots = p_z$$

gesetzt wird, so wird

$$w_z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^z$$

oder

$$w_z = \frac{1}{2} + 2^{z-1}\left(p - \frac{1}{2}\right)^z \ldots\ldots (4)$$

Ist also $p > \frac{1}{2}$, d. h. ist es wahrscheinlicher, dass die Zeugen nicht betrügen, als dass sie betrügen, so wird

$$w_z > \frac{1}{2}$$

d. h. grösser als die Wahrscheinlichkeit a priori des Ereignisses.

Analog ersieht man aus Gleichung (3), dass wenn für eine gerade Anzahl von Zeugen

$$p_i < \frac{1}{2}$$

wird, doch $w_z > \frac{1}{2}$ ist.

Mit wachsendem z wird sich w_z dem Werte $\frac{1}{2}$ nähern.

Aufgabe 287. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit eines Urteils das zwischen zwei entgegengesetzten an sich gleich zulässigen Meinungen von s Richtern mit einer Majorität von σ Stimmen abgegeben wird; wenn Betrug bei den Richtern ausgeschlossen, und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jeder nicht irrt, gleich r ist?

Auflösung. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit W ergibt sich aus Gleichung (5) der Aufgabe 285, wenn man in derselben $\omega = \omega'$ setzt und beachtet, dass

$$m = \frac{1}{2}(s + \sigma)$$

$$n = \frac{1}{2}(s - \sigma)$$

ist, wodurch man erhält

$$W = \frac{r^{1/2(s+\sigma)}\, r'^{1/2(s-\sigma)}}{r^{1/2(s+\sigma)}\, r'^{1/2(s-\sigma)} + r'^{1/2(s+\sigma)}\, r^{1/2(s-\sigma)}}$$

oder

$$W = \frac{1}{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sigma}}$$

Da man wohl immer annehmen kann, dass $r > \frac{1}{2}$ ist, indem es wahrscheinlicher ist, dass der Richter nicht irrt, als dass er irrt, so ist $r' < \frac{1}{2}$, also

$$\frac{r'}{r} < 1$$

daher wird mit wachsendem σ auch der Wert W wachsen, d. h. die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Urteils wird desto grösser, je grösser die Majorität ist, mit welcher es geschöpft wurde. Es ist daher für die Justiz von Wichtigkeit, dass Appellationsgerichte, welche aus einer Anzahl aufgeklärter Richter bestehen, die Urteile mit grosser Majorität fällen. Hiebei wird die Majorität in dem Urteilsspruch so bestimmt werden müssen, dass die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Urteils so bedeutend ist, dass der Gesellschaft die aus der Lossprechung drohende Gefahr grösser erscheint als der Irrtum des Gerichtshofes. Würde man Einstimmigkeit fordern, dann würde eine grössere Anzahl Freisprechungen stattfinden, als billiger Weise zulässig sind. (Mayer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung.)

Anmerkung 53. Soll ein Urteil einstimmig von s Richtern gefasst werden, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{1}{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^{s}}$$

indem $\sigma = s$ wird. Zur Bestimmung von r schlägt Laplace folgenden Weg vor: Wurden von einem Gerichtshofe aus s Richtern von a zur Verhandlung gekommenen Fällen über α einstimmige Urteile abgegeben, so kann man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Urteil einstimmig gefällt wird, gleich $\frac{\alpha}{a}$ setzen.

Da nun ein Urteil einstimmig gefällt wird, wenn entweder alle Richter irren, oder nicht irren, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Einstimmigkeit des Urteils gegeben durch

$$r'^s + r^s$$

daher ist:

$$r^s + (1-r)^s = \frac{\alpha}{a},$$

aus welcher Gleichung r berechnet werden kann, wobei von den zulässigen Werten nur der zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegende zu nehmen ist, da vorausgesetzt werden kann, dass der Richter eher nicht irrt als irrt.

Dass immer ein Wert r zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, folgt so: Setzt man

$$f(r) = r^s + (1-r)^s - \frac{\alpha}{a}$$

so wird

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{s-1}} - \frac{\alpha}{a}$$

$$f(1) = 1 - \frac{\alpha}{a}$$

Da nun $\frac{\alpha}{a} < 1$ ist und wenn s hinreichend gross angenommen wird $\frac{1}{2^{s-1}} < \frac{\alpha}{a}$ wird, so ist $f(1) > 0$ und $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, daher liegt zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 eine Wurzel der Gleichung $f(r) = 0$ (vergl. das Lehrbuch der Gleichungen der Kleyerschen Encyklopädie).

Macht man von der Gleichung

$$r^s + r'^s = \frac{\alpha}{a}$$

Gebrauch, so übergeht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einstimmig gefälltes Urteil richtig ist, in

$$W = r^s \cdot \frac{a}{\alpha}$$

oder auch, wenn man $r^s = \frac{\alpha}{a} - r'^s$ setzt:

$$W = 1 - \frac{a}{\alpha} r'^s.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass W desto grösser ist, je grösser s, je zahlreicher also der Gerichtshof ist.

Aufgabe 288. Wie gross muss die Majorität, mit der ein Urteil gefällt wird, sein, damit die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Urteils den Wert C hat?

Auflösung. Die Aufgabe 287 liefert, wenn $W = C$ gesetzt wird:

$$C = \frac{1}{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^\sigma}$$

woraus σ zu berechnen ist. Es ergibt sich

$$\sigma = \frac{\log C - \log (1-C)}{\log r - \log (1-r)}$$

Nimmt man etwa

$$r = 0{,}8 \qquad C = 0{,}9999$$

also

$$1-r = 0{,}2 \qquad 1-C = 0{,}0001$$

an, so wird

$$\sigma = \frac{\log 9999}{\log 4}$$

$$= \frac{3{,}9999566}{0{,}6020600}$$

$$= 6{,}6$$

d. h. bei einer Majorität von 7 Stimmen wird die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit eines Urteils 0,9999, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Richter nicht irrt, den Wert 0,8 hat.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 289. Eine Urne enthält neben $n-1$ weissen 1 schwarze Kugel. Es wird eine Kugel gezogen. Zwei bei der Ziehung anwesende Zeugen, bei denen Irrtum ausgeschlossen ist, sagen aus, dass die gezogene Kugel schwarz ist. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel wirklich schwarz ist?

Andeutung. Die Lösung geschieht mit Hilfe des Satzes von Bayes, wobei die beiden Fälle zu beachten sind, dass die schwarze Kugel gezogen wurde, oder nicht gezogen wurde.

Aufgabe 290. Eine Urne enthält n Nummern, es wird eine Nummer gezogen. Von zwei Zeugen A und B, die anwesend sind, behauptet A, dass die Nummer i gezogen wurde, B, dass die Nummer i nicht gezogen wurde. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nummer i gezogen wurde, wenn keiner der Zeugen irrt?

Andeutung. Man unterscheide alle zulässigen Fälle und benutze dann den Satz von Bayes.

Aufgabe 291. In Aufgabe 290 werde vorausgesetzt, dass keiner der Zeugen betrügt, welches ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nummer i nicht gezogen wurde?

Aufgabe 292. In Aufgabe 290 werde keine Voraussetzung über die Verlässlichkeit der Zeugen gemacht. Welches ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Nummer i gezogen wurde?

Aufgabe 293. Eine Urne enthält $m+n$ Kugeln, von denen m weiss und n schwarz sind. Ein der Ziehung beiwohnender Zeuge sagt aus, dass die gezogene Kugel weiss war, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel wirklich weiss war?

Aufgabe 294. Eine Urne enthält n Nummern. Von zwei Zeugen, welche der Ziehung beiwohnten, sagt A aus, dass die Nummer i gezogen wurde, während B behauptet, dass die Nummer k gezogen wurde. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wirklich die Nummer i gezogen wurde, wenn die beiden Zeugen nicht irren?

Andeutung. Man muss die Annahme machen, dass entweder beide, oder einer der Zeugen lügen, und für die Annahme die Wahrscheinlichkeiten der Aussagen berechnen.

Aufgabe 295. In Aufgabe 294 werde angenommen, dass beide Zeugen nicht betrügen. Welches ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Nummer i gezogen wurde?

Aufgabe 296. In einer Urne sind 25 weisse und 20 schwarze Kugeln, von 32 Personen, welche einer Ziehung anwesend waren, behaupten 8, dass eine schwarze, 24, dass eine weisse Kugel gezogen wurde. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wirklich eine weisse Kugel gezogen wurde, wenn für jede Person die Wahrscheinlichkeit zu irren mit 0,2 und die Wahrscheinlichkeit zu betrügen mit 0,03 festgesetzt wird?

Andeutung. Vergleiche die allgemeine Lösung der Aufgabe 285.

Aufgabe 297. Wie gross wird die Wahrscheinlichkeit in Aufgabe 296, wenn 20 Personen aussagen, dass eine weisse und 12, dass eine schwarze Kugel gezogen wurde?

Aufgabe 298. Eine Urne enthält k Nummern, eine von denselben wird gezogen. Von $m+n$ der Ziehung anwesenden Zeugen sagen m aus, es sei die Nummer i gezogen, n sagen aus, die Nummer i sei nicht gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nummer i gezogen wurde?

Andeutung. Die Lösung geschieht analog der Aufgabe 285.

Aufgabe 299. Bei einer Lotterieziehung wird eine Nummer von 5 Zeugen gleichzeitig besehen und ausgerufen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wirklich die ausgerufene Nummer gezogen wurde, wenn Irrtum ausgeschlossen ist und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zeugen nicht betrügen mit 0,999 angenommen wird?

Andeutung. Man hat in der allgemeinen Lösung der vorigen Aufgabe nur die Werte einzusetzen, wobei $k = 90$ ist.

Aufgabe 300. Bei einer Lotterieziehung wird eine Nummer von einer Person als gezogen bezeichnet und vier weitere Zeugen sagen succesive durch Überlieferung aus, dass eben dieselbe Nummer gezogen wurde. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nummer wirklich gezogen wurde, wenn Irrtum bei dem ersten Zeugen ausgeschlossen ist und die Wahrscheinlichkeit der Zeugen nicht zu betrügen 0,999 ist?

Andeutung. Vergleiche die allgemeine Lösun der Aufgabe 286.

Aufgabe 301. Welcher Vorgang ist bei einer Lotterieziehung zu empfehlen, der in Aufgabe 299 oder in Aufgabe 300 angenommene?

Andeutung. Offenbar ist der Vorgang der bessere, bei welchem sich die grössere Wahrscheinlichkeit ergiebt, dass das bezeugte Ereignis auch eintrat.

Aufgabe 302. Bei einem Gerichtshofe, der aus 15 Richtern besteht, wurden während eines Jahres 2356 Fälle verhandelt, von denen 1213 einstimmig erledigt wurden, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Richter irrt?

Andeutung. Man hat nach Anmerkung 53 au der Gleichung

$$r^{15} + (1-r)^{15} = \frac{1213}{2356}$$

den Wert von r zu suchen, der zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt. Vergleiche hiezu das Lehrbuch der Gleichungen der Kleyerschen Encyklopädie.

Aufgabe 303. Wenn angenommen wird, dass die Wahrscheinlichkeit des Irrtums eines Richters 0,05 ist, wie viel Stimmen Majorität sind erforderlich, damit die Wahrscheinlichkeit, dass ein Urteil richtig ist, den Wert 0,999999 annehme?

Andeutung. Vergleiche die Aufgabe 288.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das **vollständige**

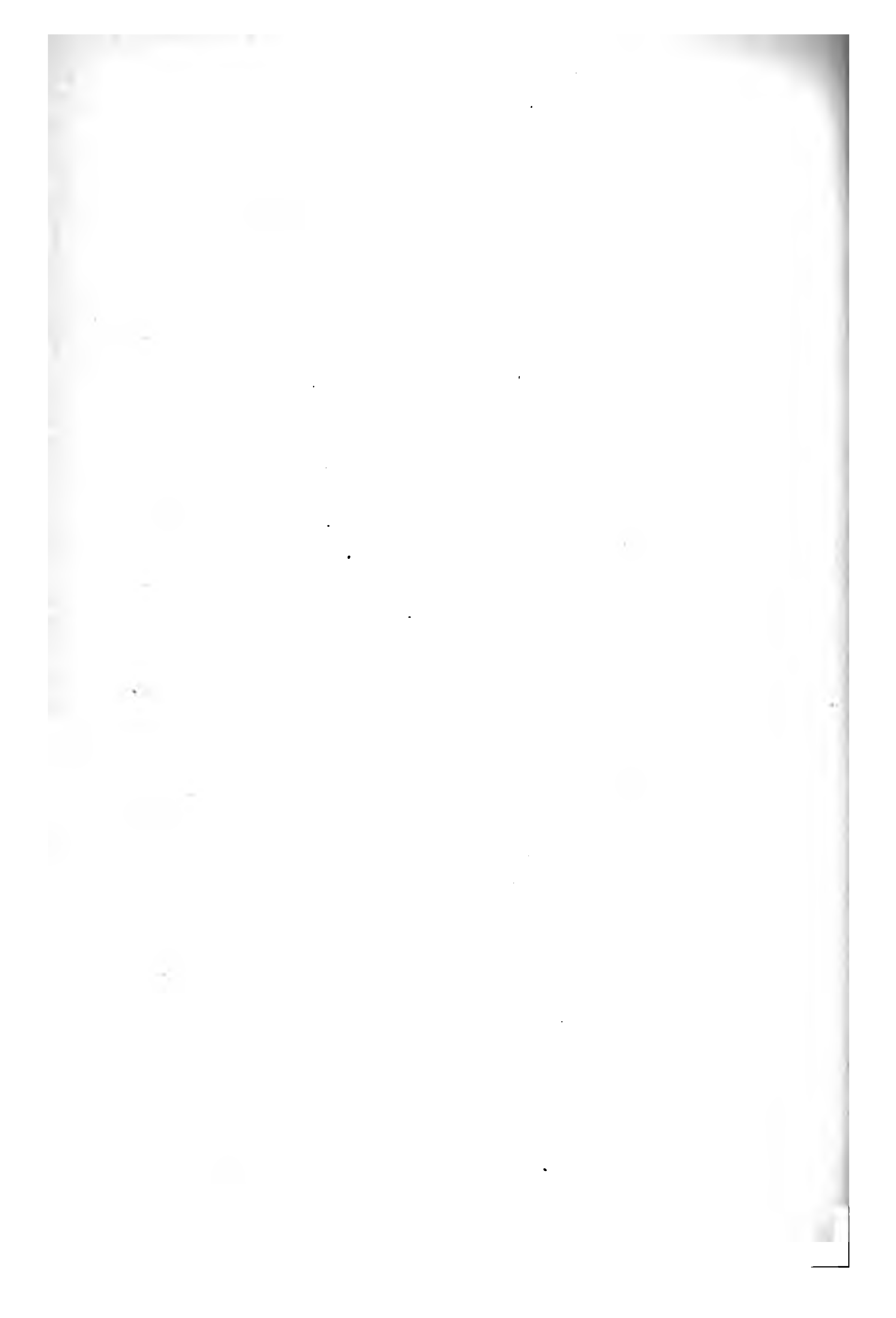
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

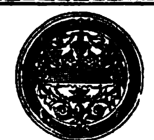
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



866. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dritter Teil. Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen. Forts. v. Heft 865. — Seite 273—288. Mit 2 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 865. — Seite 273—288. Mit 2 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Anhang I.

Berechnung des ganzen Laplace'schen Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Setzt man

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

so ist auch

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

wobei x und y beliebige Integrationsvariable sind.

Es wird daher

$$J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \,.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy,$$

oder da in dem ersten Integral x die Integrationsvariable ist, kann man auch schreiben:

$$J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,e^{-y^2}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

so dass J^2 in ein Doppelintegral übergeht.

Wir deuten nun x und y als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so dass $dx\,.\,dy$ die Fläche des unendlich kleinen Rechteckes wird, das sich an dem Punkte, dessen Koordinaten x und y sind, befindet, und dessen Seiten die Längen dx und dy haben.

Setzen wir nun

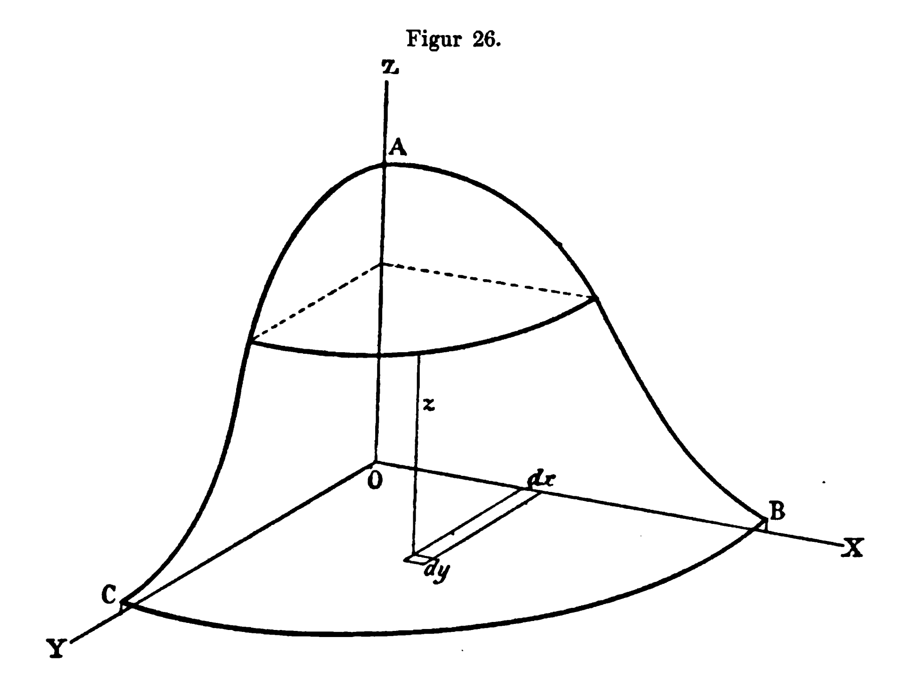
$$z = e^{-x^2-y^2}$$

und deuten z als dritte Raumkoordinate, so stellt die Gleichung

$$z = e^{-x^2-y^2}$$

eine Fläche dar, die sich über der xy-Ebene erstreckt (Fig. 26). Und zwar ist die xy-Ebene eine Assyimptotenebene dieser Fläche, indem sich die Fläche glockenförmig über derselben bis zum Punkte A ($x = o$, $y = o$, $z = 1$) erhebt und immer flacher werdend sich der xy-Ebene nähert.

Figur 26.



Die Fläche entsteht durch Rotation der Curve AB in der xz-Ebene um die Achse $\overline{oz}$. Die Curve AB hat die Gleichung

$$z = e^{-x^2}$$

Das Volumen V, welches diese Fläche mit der xy-Ebene einschliesst, ist gegeben durch

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, dx\, dy$$

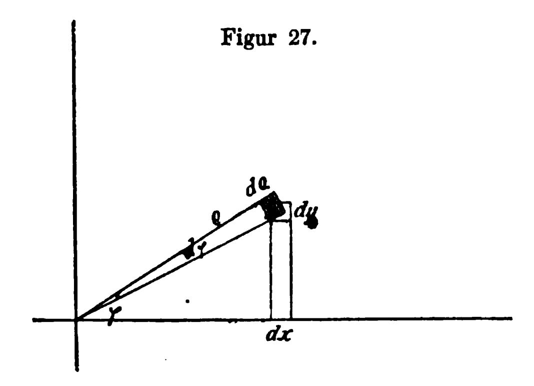
(vergl. Kleyer Lehrbuch der Integralrechnung). Also ist

$$J^2 = V.$$

Dieses Volumen können wir auch auf eine andere Art berechnen. Wir führen nämlich in der xy-Ebene Polarkoordinaten ein. Jndem wir setzen:

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi,$$

Figur 27.



nehmen wir gleichzeitig statt des Elementarflächenteilchens $dx \cdot dy$ ein anderes Flächenteilchen, nämlich das unendlich kleine schraffierte Rechteck, dessen Seiten $\rho\, d\varphi$ und $d\rho$ sind (Fig. 27), dessen Flächeninhalt also $\rho\, d\rho\, d\varphi$ ist. Das zugehörige Volumenselement wird dann

$$z \rho\, d\rho\, d\varphi$$

sein, und das Volumen ist

$$V = \int\int z \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

wobei die Grenzen zu bestimmen sind. Da das Volumen über der ganzen

xy-Ebene zu nehmen ist, so müssen ρ und φ alle Punkte der Ebene geben, d. h. es ist ρ zu nehmen von o bis ∞ und φ von o bis 2π, so dass

$$V = \int_{\varphi=o}^{\varphi=2\pi} \int_{\rho=o}^{\rho=\infty} z\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

oder da ρ und φ unabhängig von einander sind und die Grenzen beider Integrale bestimmt sind, ist

$$V = \int_o^{2\pi} d\varphi \int_o^{\infty} z\,\rho\,d\rho.$$

Nun ist

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

also

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

mithin

$$z = e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2},$$

und es wird

$$\int z\,\rho\,d\rho = \int e^{-\rho^2} \rho\,d\rho$$

Setzt man

$$\rho^2 = \xi,$$

also

$$2\rho\,d\rho = d\xi,$$

so wird

$$\int z\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2} \int e^{-\xi}\,d\xi = -\frac{1}{2} e^{-\xi},$$

also

$$\int_o^{\infty} z\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2} \int_o^{\infty} e^{-\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}$$

Setzt man diesen Wert in das obige Integral ein, so ergibt sich

$$V = \int_o^{2\pi} d\varphi \int_o^{\infty} z\,\rho\,d\rho = \int_o^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{2} = \pi,$$

also folgt

$$J^2 = V = \pi$$

oder

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Da nun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{o} e^{-x^2}\,dx + \int_o^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

ist, und das erste Integral

$$\int_{-\infty}^{o} e^{-x^2}\,dx = \int_o^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

wird, wenn man an Stelle x einführt $-x$, so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

also

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Setzt man an Stelle von x . . . kx, also an Stelle von dx . . . kdx, so wird

$$\int_{0}^{\infty} e^{-k^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2k}$$

Tabelle I.

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}$$

x	y	x	y	x	y
0,0	0,56419	1,2	0,13368	2,4	0,00178
0,1	0,55858	1,3	0,10411	2,5	0,00109
0,2	0,54206	1,4	0,07947	2,6	0,00065
0,3	0,51562	1,5	0,05947	2,7	0,00039
0,4	0,48077	1,6	0,04361	2,8	0,00022
0,5	0,43939	1,7	0,03135	2,9	0,00012
0,6	0,39362	1,8	0,02210	3,0	0,00007
0,7	0,34564	1,9	0,01526	3,1	0,00004
0,8	0,29749	2,0	0,01033	3,2	0,00001
0,9	0,25098	2,1	0,00686	3,3	0,00000
1,0	0,20755	2,2	0,00446		
1,1	0,16824	2,3	0,00284		

Tabelle II.

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

x	$\Theta(x)$	x	$\Theta(x)$	x	$\Theta(x)$
0,00	**0,000 0000**	**0,40**	**0,428 3922**	**0,80**	**0,742 1010**
1	011 2833	1	437 9690	1	748 0033
2	022 5644	2	447 4676	2	753 8108
3	033 8410	3	456 8867	3	759 5238
4	045 1109	4	466 2251	4	765 1427
5	056 3718	5	475 4818	5	770 6680
6	067 6215	6	484 6555	6	776 1002
7	078 8577	7	493 7452*)	7	781 4398
8	090 0781	8	502 7498	8	786 6873
9	101 2806	9	511 6683	9	791 8432
0,10	**0,112 4630**	**0,50**	**0,520 4999**	**0,90**	**0,796 9082**
1	123 6230	1	529 2437	1	801 8828
2	134 7584	2	537 8987	2	806 7677
3	145 8671	3	546 4641	3	811 5635
4	156 9470	4	554 9392	4	816 2710
5	167 9959	5	563 3233	5	820 8908
6	179 0117	6	571 6157	6	825 4236
7	189 9923	7	579 8158	7	829 8703
8	200 9357	8	587 9229	8	834 2315
9	211 8398	9	595 9365	9	838 5081
0,20	**0,222 7025**	**0,60**	**0,603 8561**	**1,00**	**0,842 7008**
1	233 5218	1	611 6812	1	846 8105
2	244 2958	2	619 4114	2	850 8380
3	255 0225	3	627 0463	3	854 7842
4	265 7000	4	634 5857	4	858 6499
5	276 3263	5	642 0292	5	862 4360
6	286 8997	6	649 3765	6	866 1435
7	297 4182	7	656 6275	7	869 7732
8	307 8800	8	663 7820	8	873 3261
9	318 2834	9	670 8399	9	876 8030
0,30	**0,328 6267**	**0,70**	**0,677 8010**	**1,10**	**0,880 2050**
1	338 9081	1	684 6654	1	883 5330
2	349 1259	2	691 4330	2	886 7879
3	359 2785	3	698 1038	3	889 9707
4	369 3644	4	704 6780	4	893 0823
5	379 3819	5	711 1556	5	896 1238
6	389 3296	6	717 5367	6	899 0962
7	399 2059	7	723 8216	7	902 0004
8	409 0093	8	730 0104	8	904 8374
9	418 7385	9	736 1035	9	907 6083

*) Für $x = 0{,}476936$ ist $\Theta(x)$ nahezu gleich 0,5.

Fortsetzung von Tabelle II.

x	$\Theta(x)$	x	$\Theta(x)$	x	$\Theta(x)$
1,20	0,910 3140	**1,70**	0,983 7904	**2,20**	0,998 1371
1	912 9555	1	984 4070	1	998 2244
2	915 5339	2	985 0028	2	998 3079
3	918 0501	3	985 5785	3	998 3878
4	920 5052	4	986 1346	4	998 4642
5	922 9001	5	986 6717	5	998 5373
6	925 2359	6	987 1903	6	998 6071
7	927 5136	7	987 6910	7	998 6739
8	929 7342	8	988 1742	8	998 7375
9	931 8987	9	988 6406	9	998 7986
1,30	0,934 0080	**1,80**	0,989 0905	**2,30**	0,998 8568
1	936 0632	1	989 5245	1	998 9124
2	938 0652	2	989 9431	2	998 9655
3	940 0150	3	990 3467	3	999 0162
4	941 9137	4	990 7359	4	999 0646
5	943 7622	5	991 1110	5	999 1107
6	945 5614	6	991 4725	6	999 1548
7	947 3124	7	991 8207	7	999 1968
8	949 0160	8	992 1562	8	999 2369
9	950 6733	9	992 4793	9	999 2751
1,40	0,952 2851	**1,90**	0,992 7904	**2,40**	0,999 3115
1	953 8524	1	993 0899	1	999 3462
2	955 3762	2	993 3782	2	999 3793
3	956 8573	3	993 6557	3	999 4108
4	958 2966	4	993 9226	4	999 4408
5	959 6950	5	994 1794	5	999 4694
6	961 0535	6	994 4263	6	999 4966
7	962 3729	7	994 6637	7	999 5226
8	963 6541	8	994 8920	8	999 5472
9	964 8979	9	995 1114	9	999 5707
1,50	0,966 1052	**2,00**	0,995 3223	**2,50**	0,999 5931
1	967 2768	1	995 5248	1	999 6143
2	968 4135	2	995 7194	2	999 6345
3	969 5162	3	995 9064	3	999 6537
4	970 5857	4	996 0859	4	999 6720
5	971 6227	5	996 2580	5	999 6893
6	972 6281	6	996 4235	6	999 7058
7	973 6026	7	996 5821	7	999 7215
8	974 5470	8	996 7344	8	999 7364
9	975 4620	9	996 8805	9	999 7505
1,60	0,976 3484	**2,10**	0,997 0206	**2,60**	0,999 7640
1	977 2069	1	997 1548	1	999 7767
2	978 0381	2	997 2836	2	999 7888
3	978 8429	3	997 4070	3	999 8003
4	979 6218	4	997 5253	4	999 8112
5	980 3756	5	997 6386	5	999 8215
6	981 1049	6	997 7471	6	999 8313
7	981 8104	7	997 8511	7	999 8406
8	982 4928	8	997 9507	8	999 8494
9	983 1526	9	998 0459	9	999 8578

Fortsetzung von Tabelle II.

x	$\Theta(x)$	x	$\Theta(x)$	x	$\Theta(x)$
2,70	0,999 8657	**2,80**	0,999 9250	**2,90**	0,999 9589
1	999 8732	1	999 9293	1	999 9613
2	999 8803	2	999 9334	2	999 9637
3	999 8870	3	999 9373	3	999 9658
4	999 8934	4	999 9409	4	999 9679
5	999 8994	5	999 9443	5	999 9698
6	999 9051	6	999 9476	6	999 9716
7	999 9105	7	999 9507	7	999 9733
8	999 9156	8	999 9536	8	999 9750
9	999 9204	9	999 9563	9	999 9765
				3,00	0,999 9779
				4,00	0,999 9999

Anhang II.

Beweis der Stirlingschen Formel: für grosse Werte von n ist:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Wir setzen:

$$J(n) = \int_o^n x^n e^{-x} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und führen die Substitution:

$$x = n - t\sqrt{2n}, \qquad dx = -dt\sqrt{2n}$$

ein, wodurch die Grenzen $x = o$ und $x = n$ der bestimmten Integrals übergehen in

$$t = \sqrt{\frac{n}{2}} \qquad \text{und} \qquad t = o$$

so dass also

$$J(n) = -\int_{\sqrt{\frac{n}{2}}}^{o} (n - t\sqrt{2n})^n e^{-n+t\sqrt{2n}} dt.\sqrt{2n}$$

oder

$$J(n) = n^n e^{-n} \sqrt{2n} \int_o^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \left(1 - \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n e^{t\sqrt{2n}} dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wird.

Das Integral

$$L = \int_o^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \left(1 - \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n e^{t\sqrt{2n}} dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

bestimmen wir nun für den Grenzwert $n = \infty$. Setzen wir nämlich n sehr gross voraus, so wird

$$\log\left(1 - \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^3 - \ldots$$

$$= -\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{n} - \frac{1}{3}\frac{t^3\sqrt{8}}{\sqrt{n^3}}\mathfrak{P}(t)$$

wobei $\mathfrak{P}(t)$ eine nach ganzen Potenzen von t fortschreitende Potenzreihe ist, welche für $t < \sqrt{\frac{n}{2}}$ convergiert, und $\mathfrak{P}(o) = 1$ liefert. Denn die Reihenentwicklung von $\lg(1 - y)$ convergiert für alle $y < 1$.

Es ist also:

$$n \log\left(1-\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) = -t\sqrt{2n} - t^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{t^3\sqrt{8}}{\sqrt{n}}\,\mathfrak{P}(t)$$

oder

$$\left(1-\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-t\sqrt{2n}-t^2-\frac{1}{3}\frac{t^3\sqrt{8}}{\sqrt{n}}\mathfrak{P}(t)}$$

$$= e^{-t\sqrt{2n}}.e^{-t^2}.e^{-\frac{1}{3}\frac{t^3\sqrt{8}}{\sqrt{n}}\mathfrak{P}(t)}$$

In die Gleichung (3) eingesetzt erhält man:

$$L = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \left(1-\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n e^{t\sqrt{2n}}\,dt = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-t\sqrt{2n}}e^{-t^2}.e^{-\frac{1}{3}\frac{t^3}{\sqrt{n}}\mathfrak{P}(t)}e^{t\sqrt{2n}}\,dt$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-t^2}.e^{-\frac{1}{3}\frac{t^3}{\sqrt{n}}\mathfrak{P}(t)}\,dt$$

Nun wird für grosse n der Wert von $\frac{1}{3}\,\frac{t^3}{\sqrt{n}}\,\mathfrak{P}(t)$ sehr klein und

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{\sqrt{n}}\,\mathfrak{P}(t) = o$$

also ist

$$\lim_{n=\infty} L = \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi} \quad \text{(Vgl. Anhang I),}$$

so dass für grosse Werte von n gesetzt werden kann:

$$L = \sqrt{\pi}$$

wodurch dann Gleichung (2) liefert:

$$J(n) = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Da aber anderseits für grosse n

$$J(n) = \int\limits_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

gesetzt werden kann, so folgt, dass

$$J(n) = n!$$

ist. Denn es ist

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

wie die partielle Integration liefert (vergl. Kleyer, Lehrbuch der Integralrechnung), also ist

$$\int\limits_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n\int\limits_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx,$$

oder es ist

$$J(n) = n\,J(n-1)$$

also auch

$$J(n-1) = (n-1)\,J(n-2)$$
$$\vdots$$
$$J(2) = 2\,.\,J(1)$$
$$J(1) = 1\,.\,J(o)$$

daher durch Multiplikation:

$$J(n) = n(n-1)\ldots 2\,.\,1\,.\,J(o)$$

und da

$$J(o) = \int_o^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

ist, so folgt

$$J(n) = n(n-1)\ldots 2\,.\,1\,.\,1 = n!$$

also liefert Gleichung (4)

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

welche Gleichung streng nur für $n = \infty$ Geltung hat, aber schon für einigermassen grosse Zahlen sehr gute Werte liefert.

So ergibt sich direkt berechnet:

$$20! = 2432902008176640000$$

während obige Formel liefert, da:

$$\pi = 3{,}1415926 \qquad \log \pi = 0{,}4971499$$
$$e = 2{,}7182818 \qquad \log e = 0{,}4342945$$

ist:

$$\left.\begin{array}{rl} \log \sqrt{40} = & 0{,}8010300 \\ \log \sqrt{\pi} = & 0{,}2485749 \\ 20 \log 20 = & 26{,}0206000 \end{array}\right\} +$$
$$\left.\begin{array}{rl} & 27{,}0702049 \\ 20 \log e = & 8{,}6858900 \end{array}\right\} -$$
$$\begin{array}{r} 18{,}3843149 \\ 2422785 \end{array}$$

und daher:

$$20^{20} e^{-20} \sqrt{2\,.\,\pi\,.\,20} = 2422785000000000000$$

Es wird daher etwa

$$20! - 20^{20} e^{-20} \sqrt{2\,.\,\pi\,.\,20} = 10^{16}$$

und da

$$20! > 243\,.\,10^{16}$$

so wird der Fehler kleiner als 5 ‰, und nicht viel grösser als 4 ‰, was schon für die Anwendung meist eine zu vernachlässigende Grösse ist.

Verzeichnis der Formeln,

welche in diesem Buche entwickelt wurden.

I. Teil.

A. Über die mathematische Wahrscheinlichkeit.
B. Über die direkte und entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Formel 1: $w = \frac{g}{m}$, ... g die Anzahl günstiger, m die Anzahl gleich möglicher Fälle für das Eintreffen eines Ereignisses.

Formel 2: $w + w' = 1$ . . . . Relation zwischen der direkten und der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

Formel a: ${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$ Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur $k$ten Klasse.

Formel b: $k! = 1.2.3\ldots k$ . . . . Faktorielle k.

Formel a': $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n}{o} = \binom{n}{n} = 1$$

Formel c: $P_n = n! = 1.2.3\ldots n$ . . . . . . Anzahl der Permutationen von n Elementen ohne Wiederholung.

C. Über die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Formel 3: $w = w_1 + w_2$ . . . . Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereignissen das eine oder das andere eintritt.

Formel 4: $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ . . . . Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, dass aus dem gleichzeitigen Eintreffen von n von einander unabhängigen Ereignissen besteht, deren Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2 \ldots w_n$ sind.

Formel 5: $W = w\,.\,\omega$ . . . . Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen zweier von einander abhängigen Ereignisse.

Formel 5': $W = w_1 \omega_2 \omega_3 \ldots \omega_k$ . . . . Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von k Ereignissen, von denen jedes nur dann eintreffen kann, wenn alle vorangehenden eingetroffen sind.

Formel d: $P'_{k+l} = \frac{(k+l)!}{k!\;l!}$ . . . . Die Anzahl Permutationen, von $k+l$ Elementen, von denen k und l einander gleich sind.

Formel d': $P'_{k+l+n} = \frac{(k+l+n)!}{k!\;l!\;n!}$ . . . . . Die Anzahl der Permutationen von $k+l+n$ Elementen, von denen je k, l, n einander gleich sind.

Formel d'': $P'_{k+l+n+\ldots+r} = \frac{(k+l+n+\ldots+r)!}{k!\;l!\;n!\ldots r!}$ Die Anzahl der Permutationen von $k+l+n+r$ Elementen, von denen je $k, l, n\ldots, r$ einander gleich sind.

D. Über die relative Wahrscheinlichkeit.

Formel 6: $p = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + \ldots w_k}$ . . . . Relative Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit w_1 in Bezug auf die Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $w_2, w_3 \ldots w_k$.

II. Teil.

A. Über Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Versuchen.

Formel 7: $w = p^{m-k} q^k$ . . . . Wahrscheinlichkeit für das $(m-k)$-malige Eintreffen des Ereignisses in bestimmter Reihenfolge bei m Versuchen.

Formel 8: $w = \binom{m}{k} p^{m-k} q^k$ . . . . Wahrscheinlichkeit für das $(m-k)$-malige Eintreffen eines Ereignisses bei m Versuchen ohne Rücksicht auf die Aufeinanderfolge des Eintreffens und des Nichteintreffens.

Formel 9:

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \triangle x$$

$$h = \frac{1}{\triangle x \sqrt{2pqm}}$$

. . . . . . p ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses, w ist die relative Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis $\left(pm + \frac{x}{\Delta x}\right)$ oder $\left(pm - \frac{x}{\Delta x}\right)$-mal eintritt bei m Versuchen.

Formel 10:

$$w = 0{,}094661 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2pq}} \cdot \frac{x}{\triangle x \sqrt{m}}$$

$$\log 0{,}094661 = 0{,}9761735 - 2$$

. . . w ist die relative Wahrscheinlichkeit mittels der Tabelle I berechnet, dafür, dass bei m Versuchen das Ereignis $\left(pm \pm \frac{x}{\Delta x}\right)$-mal eintritt.

Formel 11:

$$w = \frac{m!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_k^{n_k}$$

$$m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

. . Wahrscheinlichkeit für das n_1-malige Eintreffen des Ereignisses E_1.
n_2- " " " " . E_2.
⋮
n_k " " " " E_k
denen die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2 \ldots p_k$ zukommen.

Formel e:

$$\binom{a}{m} + \binom{a}{m-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{m-2}\binom{b}{2} + \ldots \binom{a}{1}\binom{b}{m-1} + \binom{b}{m} = \binom{a+b}{m}$$

Formel e':

$$\sum_{n_1, n_2 \ldots k_k} \binom{a_1}{n_1}\binom{a_2}{n_2} \ldots \binom{a_k}{n_k} = \binom{a_1 + a_2 + \ldots a_k}{m}$$

$$m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

Formel f: $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ Stirlingsche Formel (siehe Anhang II).

B. Über das Bernoullische Theorem (Gesetz der grossen Zahlen).

Formel 12: $W \geq \frac{u}{1+u}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

$+\delta \geq p - \frac{m'}{m} \geq \delta$ ist, wobei

$p = \frac{as}{s(a+b)}$, $q = \frac{bs}{s(a+b)}$ ist, und

$\frac{1}{s(a+b)} \leq \delta$ sein soll, wenn δ vorgegeben ist.

Man hat dann für die Bestimmung von m:

$$C = u(sb - 1) \qquad C_1 = u(sa - 1)$$

$$k \geq \frac{\log C}{\log(su+1) - \log su} \qquad k_1 \geq \frac{\log C_1}{\log(sb+1) - \log sb}$$

$$r \geq k + 1 + \frac{ksb}{sa+1} \qquad r_1 \geq k_1 + 1 + \frac{k_1 sa}{sb+1}$$

$$m \geq rs(a+b) \qquad m_1 \geq r_1 s(a+b),$$

wobei die grössere der beiden Zahlen m, m_1 zu nehmen ist.

Formel 13: $$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei m Versuchen, wenigstens $(mp - r)$-mal und höchstens $(mp + r)$-mal eintritt.

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2pqm}}$$

$$p + q = 1$$

C. Über die mathematische Erwartung (Wetten, Versicherungen.)

Formel 14: $E = P \,.\, w$ . . . . Formel für die mathematische Erwartung.

Formel 15: $P \,.\, w = Q(1 - w)$ . . . . Bedingung einer billigen Wette.

Formel 16: $\left.\begin{array}{l} E_A = w \,.\, G \\ E_B = w' G \end{array}\right\}$ . . . . Einsätze einer billigen Wette.

Formel 17: $e = w_1 G_1 + w_2 G_2 + \ldots + w_k G_k$ . . Einsatz auf das Eintreffen mehrerer Ereignisse.

Formel 18: $H_1 : H_2 : \;\; : H_k = w_1 : w_2 : \;\; : w_k$ . . Verteilung des Einsatzes auf die einzelnen Ereignisse.

Formel 19: $R = e w'$ . . . . Das Risiko der auf das Eintreffen des Ereignisses wettenden Person.

Formel 19': $R' = (G - e) w$ . . . . Das Risiko der auf das Nichteintreffen des Ereignisses wettenden Person.

Formel 20: $R = \sum_{+} {}_i (e - G_i) w_i$ . . . . Das Risiko bei der Wette auf das Eintreffen mehrerer Ereignisse. In der $\sum_{+} i$ sind nur die positiven Differenzen $e_i - G_i$ zu nehmen.

Formel 20': $R = \sum_{+} {}_i (G_i - e_i) w_i$ . . . . Das Risiko bei der Wette auf das Nichteintreffen mehrerer Ereignisse. In der $\sum_{+} i$ sind nur die positiven Differenzen $G_i - e_i$ zu nehmen.

Formel 21: $M = k\, l \frac{V + v}{V}$ . . . . Der moralische Wert eines Vermögenszuwachses v wenn V das Vermögen ist. l ist der natürliche Logarithmus.

Formel 22: $M = w\, l \frac{V + v}{V}$ . . . . Der moralische Wert des mit der Wahrscheinlichkeit w erwarteten Vermögenszuwachses v.

Formel 22 a: $$M = \sum_1^k {}_i w_i \, l \, \frac{V + v_i}{V}$$

Formel 23: $$H = (V + v_1)^{w_1} (V + v_2)^{w_2} \ldots (V + v_k)^{w_k} - V$$ $$w_1 + w_2 + \ldots + w_k = 1$$ Moralische Hoffnung der Vermögenszuwachse v_1 $v_2 \ldots v_k$, denen Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2 \ldots w_k$ zukommen.

Formel 23 a: $$X = (V + v_1)^{w_1} (V + v_2)^{w_2} \ldots (V + v_k)^{w_k}$$ Wert des Vermögens, dessen Zuwächse $v_1, v_2 \ldots v_k$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2 \ldots w_k$ erwartet werden.

Formel 24: $P = w\; C \frac{1 - \rho}{-l\, \rho}$ . . . . Der gegenwärtige Wert einer Summe C, welche im Laufe des Jahres mit der Wahrscheinlichkeit w flüssig wird. ρ ist der Abzinsungsfaktor. l ist der natürliche Logarithmus.

Formel 25: $$P = - \frac{w\; C}{0{,}43429448} \cdot \frac{1 - \rho}{\log \rho}$$

Formel 25': $P = w\; C \,.\, \rho^{\frac{1}{2}}$ . . . . Angenäherter Wert der Formel 25.

Formel 26: $P = \sigma\, C\, w \frac{1 - (1 - w)^n \rho^n}{1 - (1 - w) \rho}$ . . . . . Einmalige Prämie für eine Feuerversicherung auf n Jahre.

$$\sigma = \frac{1 - \rho}{- 0{,}43429448 \log \rho}$$

oder

$$\sigma = \rho^{\frac{1}{2}}$$

Formel 27: $P = \sigma C \dfrac{w}{1-(1-w)\rho}$ . . . . . . Einmalige Prämie für eine ewig dauernde Versicherung.

$\sigma = -\dfrac{1-\rho}{0{,}43429448 \log \rho}$

oder

$\sigma = \rho^{\frac{1}{2}}$

Formel 28: $p = C w \rho^{\frac{1}{2}} \dfrac{1-(1-w)^n \rho^n}{1-(1-w)\rho} \cdot \dfrac{1-\rho}{1-\rho^n}$. Jährliche Prämie für eine Versicherung auf n Jahre gegen Feuer.

Formel 29: $p = C w \rho^{\frac{1}{2}} \dfrac{1-\rho}{1-(1-w)\rho}$ . . . . Jährliche Prämie für eine immerwährende Versicherung gegen Feuer.

III. Teil.

A. Über die Wahrscheinlichkeit einer Ursache.

Formel 30: $w_i = \dfrac{p_i}{p_1 + p_2 + \ldots p_i + \ldots + p}$ . . . Satz von Bayes.

Formel 31: $w = \dfrac{f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}$ . . . . Wahrscheinlichkeit einer Hypothese x.

Formel 32: $w = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}$ . . . . . . Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese zwischen a und b liegt.

Formel 33: $w_i = \dfrac{h_i p_i}{h_1 p_1 + h_2 p_2 + \ldots + h_n p_n}$ . . . Wahrscheinlichkeit einer Ursache.

$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = 1$

Formel 34: $w = \dfrac{f(x)\,\rho(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,\rho(x)\,dx}$ . . . . . . Wahrscheinlichkeit der Hypothese x, die mit der Wahrscheinlichkeit $\rho(x)$ wirkte.

Formel 35: $w = \dfrac{\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,\rho(x)\,dx}$ . . . . . . Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese zwischen a und b liegt.

Formel 36: $W = \dfrac{\int_{1/2}^1 f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}$ . . . . Wahrscheinlichkeit einer Ursache.

Formel 37: $W = 1 - \dfrac{\int_0^{1/2} x^m (1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx}$ . . . Wahrscheinlichkeit einer Ursache, wenn das Ereignis bei $m+n$ Versuchen m-mal eintrat.

Formel g: $J_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$

Formel h: $J_{m,n} = \left(\dfrac{m}{m+n}\right)^{m+1/2} \left(\dfrac{n}{m+n}\right)^{n+1/2} \sqrt{\dfrac{2\pi}{m+n}}$ Giltig für grosse Werte von m und n.

Formel 38: $$W = 1 - \frac{1}{\mu}\,(1-\varepsilon)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer Ursache, wenn das Ereignis bei $m+n$ Versuchen m-mal eintrat, und m, n grosse Zahlen sind.

$$\mu = \frac{2\,(m-n+1)\,m^m\,n^n\sqrt{2\pi\,mn}}{(m+n)^{3/2}\left(\frac{m+n}{2}\right)^{m+n}}$$

$$\varepsilon < \frac{2n}{m+n+1}.$$

Formel 38′: $$\log\mu = \log\frac{2\,(m-n+1)}{m+n}\sqrt{\frac{2\pi\,m\,n}{m+n}}$$

$$+\;0{,}43429448\,(m+n)\left[\frac{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^4}{3.4}+\frac{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^6}{5.6}+\ldots\right]$$

B. Über die Wahrscheinlichkeit eines künftigen Ereignisses.

Formel 39: $$\frac{m+1}{m+n+2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis bei einem nächsten Versuche eintritt, nachdem es bei $(m+n)$ Versuchen, m-mal eintrat.

Formel 40: $$W = \binom{s}{r}\frac{J_{m+s-r,\;n+r}}{J_{m,\;n}}\;.\;.\;.\;.\;.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis bei s Versuchen $(s-r)$-mal eintritt, wenn es bei $m+n$ Versuchen m-mal eingetreten ist.

Formel 41: $$W = \frac{1}{J_{m,\;n}}\sum_{i=0}^{i=\nu-k}\binom{s}{\nu-i}\,J_{m+s-\nu+i,\;n+\nu-i}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei s Versuchen wenigstens $(s-\nu)$-mal und höchstens $(s-k)$-mal eintritt, nachdem es bei $(m+n)$ Versuchen, m-mal eintrat.

Formel 42: $$W = 1 - \frac{J_{m,\;n+s}}{J_{m,\;n}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis bei s folgenden Versuchen wenigstens einmal eintritt, nachdem es bei $m+n$ Versuchen m-mal eingetreten ist.

Formel 43: $$W = \frac{s^s\,d^d\,(m+a)^{m+a}\,(n+b)^{n+b}}{m^m\,n^n\,a^a\,b^b\,(s+d)^{s+d}}\cdot\sqrt{\frac{s\,d^3\,(m+a)\,(n+b)}{2\pi\,m\,n\,a\,b\,(s+d)^3}}$$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis bei $s = m+n$ Versuchen m-mal eintritt, nachdem es bei $d = a+b$ Versuchen bereits a-mal eingetreten ist.

Formel 43a: $$\log W = 0{,}43429448\;l\,A + \log\sqrt{\frac{s\,d^3\,(m+a)\,(n+b)}{2\pi\,m\,n\,a\,b\,(s+d)^3}}$$

Formel 43b: $$l\,A = (s+d)\left[\frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^4}{3.4}+\frac{\left(\frac{\sigma+\delta}{s+d}\right)^6}{5.6}+\ldots\right]$$

$$-\,s\left[\frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^4}{3.4}+\frac{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^6}{5.6}+\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$-\,d\left[\frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^4}{3.4}+\frac{\left(\frac{\delta}{d}\right)^6}{5.6}+\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$s = m+n,\qquad d = a+b$$
$$\sigma = m-n\qquad \delta = a-b$$

C. Über die wahrscheinlichste Hypothese.

Formel 44: $W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt$ . . . . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $p + \varepsilon > \omega > p - \varepsilon$ ist, wenn ω der wahre Wert der Wahrscheinlichkeit ist. Das Ereignis ist bei s Versuchen m-mal eingetreten.

$$\tau = \varepsilon \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}} = \varepsilon s \sqrt{\frac{s}{2m(s-m)}}$$

$$p = \frac{m}{m+n} = \frac{m}{s}$$

Formel 45: $\rho = 0{,}476936 \sqrt{\frac{2p(1-p)}{s}}$ . . . . . Wahrscheinlicher Fehler der wahrscheinlichsten Hypothese. Das Ereignis ist bei s Versuchen m-mal eingetreten.

$$p = \frac{m}{s}$$

Formel 46: $W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$ . . . . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis bei a folgenden Versuchen wenigstens $\left(\frac{am}{m+n} - r\right)$-mal und höchstens $\left(\frac{am}{m+n} + r\right)$-mal eintritt, nachdem es bei $s = m + n$ Versuchen m-mal eintrat.

$$\gamma = \sqrt{\frac{s}{a}} \cdot \frac{rs}{\sqrt{2mna}}$$

Druckfehler und Berichtigungen.

Seite 12 Zeile 23 rechts v. o. lies $x + 2y + 3z < 100$ statt $x + 2y + 3z > 100$
„ 22 „ 16 und 19 „ „ $D = -5 \ldots.$ „ $D = 5 \ldots.$
„ „ „ 20 „ „ $D = 500$ „ $D = -500$
„ 48 „ 10 rechts „ „ 4 Arten „ 6 Arten
„ 59 „ 12 v. u. „ $m - n + 1$ „ $m - n$
„ 64 „ 8 „ „ „ $\alpha = mp + \varepsilon$, $\beta = mq - \varepsilon$ „ $\alpha = mp - \varepsilon$, $\beta = mq + \varepsilon$
„ „ „ 5 „ „ $mp + 1$ „ mp
„ „ „ 4 „ „ $mq - \varepsilon$ „ $mq + 1 - (1 - \varepsilon)$
„ „ „ 3 „ „ mq „ $mq + 1$
„ 65 „ 18 und 19 „ ist $-\varepsilon$ an Stelle von $+\varepsilon$ zu setzen.
„ „ „ 11 „ lies $mp + 1$ statt mp
„ „ „ 10 „ „ mq „ $mq + 1$
„ 70 „ 13 „ ist L. $\triangle x$ zu streichen
„ 73 „ 11 „ „ die Wahrscheinlichkeit „ „
„ 74 „ 4 „ lies Aufgabe 91 statt Aufgabe 82
„ 81 „ 11 v. o. „ „ 71 „ „ 78
„ 112 „ 11 rechts „ „ „ 87 „ „ 78
„ 119 „ 14 „ „ „ „ 87 „ „ 78
„ 125 „ 14 „ v. u. „ 496,2 „ 496.2
„ 144 „ 6 „ „ „ $\frac{\binom{a-n}{2r}}{\binom{a-2}{2r}}$ „ $\frac{\binom{a-n}{2r+1}}{\binom{a-2}{2r+1}}$
„ 151 Wegen Aufgabe 141 vergleiche die Lösung der Aufgabe 177 Seite 294.
„ 154 Zeile 6 v. o. lies $P' = vw' + V + \ldots$ statt $vw + V + \ldots$ und berichtige das folgende dem entsprechend.
„ 166 Zeile 7 rechts v. u. lies: geschieht **nicht** wie, statt geschieht wie.
„ 200 Zeile 3 links v. o. lies 6 „ 10
„ 204 „ 14 rechts v. u. „ **der** beiden „ **aus den** beiden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

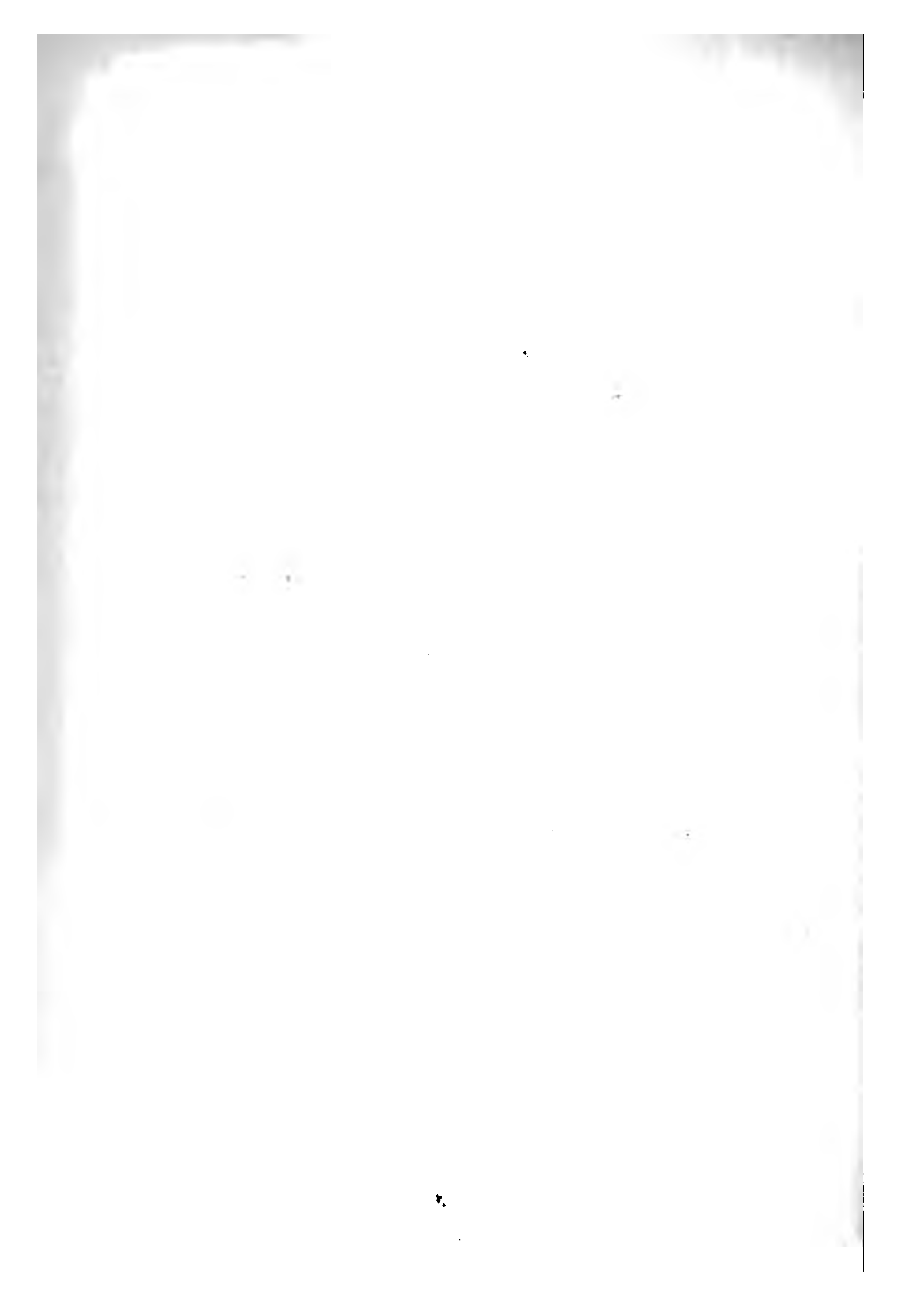
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

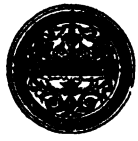
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



867. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dritter Teil. Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen. Forts. v. Heft 866. — Seite 289—296. (Schlussheft.)





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dritter Teil.

Die Wahrscheinlichkeit a posteriori. Aufgaben über Zeugenaussagen.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Dr. Karl Bobek.**

Fortsetzung v. Heft 866. — Seite 289—296.

(Schlussheft.)

Inhalt:

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Be[illegible] zweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihe[illegible] somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen g[illegible]

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktisch[illegible] gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der [illegible] verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Ve[illegible] Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erl[illegible] thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlu[illegible]**

Ergebnisse
der ungelösten Aufgaben.

I. Teil.

Die einfache und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit (Seite 51).

Aufgabe 36: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{1}{2}$

„ 37: „ „ „ $= \frac{5}{13}$

„ 38: „ „ „ $1) = \frac{1}{7}$, $2) = \frac{3}{4}$, $3) = \frac{2}{7}$, $4) = \frac{5}{14}$

„ 39: „ „ „ $1) = \frac{2}{27}$, $2) = \frac{11}{27}$

„ 40: „ „ „ $= \frac{1}{9}$

„ 41: „ „ „ $= \frac{5}{36}$

„ 42: „ „ „ $= \frac{1}{36}$

„ 43: „ „ „ $= \frac{21}{216}$

„ 44: „ „ „ $= \frac{15}{216}$

„ 45: „ „ „ $= \frac{15}{216}$

„ 46: Die Kombinationen 2ter Klasse sind:

ab ac ad ae
bc bd be
cd ce
de

Die Kombinationen 3ter Klasse sind:

abc abd abe bcd bce cde
acd ace bde
ade

Die Kombinationen 4ter Klasse sind:

abcd, *abce*, *abde*, *acde*, *bcde*

Die Kombination 5ter Klasse ist:

abcde

Aufgabe 47: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{14}{95}$

„ 48: „ „ „ $= \frac{1}{40}$

„ 49: „ „ „ $= \frac{1}{40}$

„ 50: „ „ „ $= \frac{44}{89}$

Aufgabe 51: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \binom{m}{n} : \binom{k}{m} = \frac{m!\,(k-m)!\,m!}{k!\,(m-n)!\,n!}$

„ **52:** „ „ „ $= \frac{869}{2109} = 0{,}412$

„ **53:** „ „ „ $= 0{,}5$

„ **54:** „ „ „ $= \frac{11}{45}$

„ **55:** „ „ „ $= \frac{9}{16}$

„ **56:** Die Wahrscheinlichkeiten sind 1) $= \frac{g_1 g_2}{(g_1+s_1)(g_2+s_2)}$ 2) $= \frac{g_1 s_2}{(g_1+s_1)(g_2+s_2)}$

3) $= \frac{s_1 g_2}{(g_1+s_1)(g_2+s_2)}$ 4) $= \frac{s_1 s_2}{(g_1+s_1)(g_2+s_2)}$

„ **57:** Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{\frac{1}{4}\binom{5}{1}\binom{7}{3} + \frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{7}{2} + \frac{3}{4}\binom{5}{3}\binom{7}{1} + \binom{5}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{5}{44}$

„ **58:** „ „ „ $= \binom{5}{4} : \binom{21}{4} = \frac{1}{567}$

„ **59:** „ „ „ $= \frac{\binom{5}{3}\binom{16}{1}}{\binom{21}{4}} = \frac{16}{3591}$

„ **60:** Die Wahrscheinlichkeit, wenigstens ein Ass zu kaufen, ist für den Vorhandspieler $= \frac{232}{323}$

„ **61:** „ „ „ „ „ Kartengebenden $= \frac{93}{228}$

„ **62:** „ „ „ „ „ Vorhandspieler $= \frac{17}{38}$

„ **63:** „ „ „ „ „ Kartengebenden $= \frac{153}{380}$

„ **64:** Die Wahrscheinlichkeit ist $= 0{,}2647$

„ **65:** „ „ „ $= \frac{331}{646}$

„ **66:** Die Wahrscheinlichkeit, dass *A* gewinnt ist $= \frac{11}{16}$

„ „ „ *B* „ „ $= \frac{5}{16}$

„ **67:** Die Wahrscheinlichkeiten sind: 1) $= \left(\frac{3}{8}\right)^5$ 2) $= \binom{5}{1}\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^4 =$

3) $= \binom{5}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^3 =$ 4) $= \binom{5}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^2$ 5) $= \binom{5}{1}\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{5}{8}\right)$ 6) $= \left(\frac{5}{8}\right)^5 =$

„ **68:** Die grösste Wahrscheinlichkeit hat die Summe 7 und zwar $= \frac{1}{6}$

„ **68a:** „ „ „ „ „ „ 11 „ „ $= \frac{1}{8}$

„ **69:** Die grösste Wahrscheinlichkeit hat der Zug 1 weissen und 1 schwarzen Kugel und zwar $= \frac{12}{25}$

„ **70:** Die grösste Wahrscheinlichkeit hat die Annahme, dass unter den Kugeln 2 weisse und 3 schwarze sind und zwar ist dieselbe $= 0{,}364$.

II. Teil.

A. Über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei wiederholten Versuchen (Seite 100).

Aufgabe 93: Die Wahrscheinlichkeit ist = 0,78

„ **94:** „ „ „ = 0,97

„ **95:** „ „ „ = 0,99999773

„ **96:** „ „ „ dass wenigstens 1 weisse Kugel gezogen wird, ist = 0,99467

„ „ „ „ „ 1 schwarze Kugel gezogen wird, ist = 0,999727

„ **97:** Die relative Wahrscheinlichkeit ist = 0,5078

„ **98:** Die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, ist $= \frac{5}{16}$

„ „ „ B „ „ $= \frac{11}{16}$

„ **99:** Die Wahrscheinlichkeit ist = 0,9691

„ **100:** Die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, ist:

$$= p^m + \binom{m}{1} p^{m-1} q + \binom{m}{2} p^{m-2} q^2 + \ldots + \binom{m}{b-1} p^a q^{b-1}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt ist:

$$= q^m + \binom{m}{1} q^{m-1} p + \binom{m}{2} q^{m-2} p^2 + \ldots + \binom{m}{a-1} q^b p^{a-1}$$

wobei $m = a + b - 1$ ist, p die Wahrscheinlichkeit, dass A, q die, dass B einen Stich gewinnt, bedeutet.

„ **101:** Die Wahrscheinlichkeit ist = 0,99999999999999069

„ **102:** Bei 1 Zuge ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$ bei 2 Zügen grösser als $\frac{1}{2}$

„ 3 Zügen „ „ „ „ „ $\frac{9}{10}$ „ 4 „ „ „ $\frac{9}{10}$

„ 7 „ „ „ „ „ „ $\frac{99}{100}$ „ 8 „ „ „ $\frac{99}{100}$

„ **103:** Enthält die Urne 74 weisse und 426 schwarze Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$

„ „ „ 75 „ „ 425 „ „ so ist die Wahrscheinlichkeit grösser als $\frac{1}{2}$

„ **104:** Enthält die Urne 44 weisse Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{3}{4}$

„ „ „ 103 „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{9}{10}$

„ „ „ 185 „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{99}{100}$

Enthält die Urne je eine weisse Kugel mehr, so ist die Wahrscheinlichkeit grösser als der gegebene Wert.

„ **105:** Die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 3 weisse Kugeln gezogen werden, ist

$$= 1 - \left(\frac{27}{32}\right)^5 - 5\left(\frac{27}{32}\right)^4 \left(\frac{5}{32}\right) = 0{,}1765$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 3 schwarze Kugeln gezogen werden, ist

$$= 1 - \left(\frac{25}{32}\right)^5 - 5\left(\frac{25}{32}\right)^4 \left(\frac{7}{32}\right) = 0{,}3016$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 3 rote Kugeln gezogen werden, ist

$$= 1 - \left(\frac{23}{32}\right)^5 - 5\left(\frac{23}{32}\right)^4 \left(\frac{9}{32}\right) = 0{,}4329$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 3 grüne Kugeln gezogen werden, ist

$$= 1 - \left(\frac{21}{32}\right)^5 - 5\left(\frac{21}{32}\right)^4 \left(\frac{11}{32}\right) = 0{,}5595$$

Aufgabe 106: Die Wahrscheinlichkeit ist

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left[\frac{6!}{5!\,1!} + \frac{6!}{4!\,2!} + \frac{6!}{3!\,3!} + \frac{6!}{2!\,4!} + \frac{6!}{4!\,1!\,1!} + \frac{6!}{3!\,2!\,1!} + \frac{6!}{3!\,1!\,2!} + \frac{6!}{2!\,3!\,1!} + \frac{6!}{2!\,2!\,2!} + \frac{6!}{2!\,1!\,3!}\right] = \frac{416}{729}$$

„ **107:** Die Wahrscheinlichkeit ist $= \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left[3\,\frac{6!}{4!\,1!\,1!} + 6\,\frac{6!}{3!\,2!\,1!} + \frac{6!}{2!\,2!\,2!}\right] = \frac{20}{27}$

„ **108:** „ „ „ $= 3\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \frac{10!}{3!\,3!\,4!} = \frac{1300}{6561}$

„ **109:** Bei 3 Würfen wird die Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$

„ 12 „ „ „ „ „ „ $\frac{9}{10}$,

bei einem Wurfe mehr wird die Wahrscheinlichkeit grösser als der gegebene Wert

„ **110:** Bei 3 Würfen ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$,

„ 4 „ „ „ „ grösser als $\frac{1}{2}$

irgend einen Pasch zu werfen.

„ **111:** Bei 4 (5) Würfen ist die Wahrscheinlichkeit kleiner (grösser) als $\frac{1}{2}$

„ **112:** Bei 24 (25) Würfen ist die Wahrscheinlichkeit kleiner (grösser) als $\frac{1}{2}$

„ **113:** Die Wahrscheinlichkeit ist

$$= \binom{8}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^6 + \binom{8}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^5 + \binom{8}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^4 + \binom{8}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^3 + \binom{8}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{2}{5}\right)^8 + 8\left(\frac{2}{5}\right)^7\left(\frac{3}{5}\right) + 8\left(\frac{3}{5}\right)^7\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^8\right] = 0{,}8852$$

Aufgabe 114: Die Wahrscheinlichkeit ist

$$= \frac{1}{2^{15}}\left[2\binom{15}{7} + \binom{15}{6} + \binom{15}{5} + \binom{15}{4} + \binom{15}{3}\right] = 0{,}692$$

„ **115:** Die grösste Wahrscheinlichkeit ergibt sich für 600 weisse und 1000 schwarze Kugeln und zwar ist sie $= 0{,}00206$

„ **116:** Die grösste Wahrscheinlichkeit ergibt sich für das Ziehen von 364 weissen und 636 schwarzen Kugeln und zwar ist dieselbe $= 0{,}027$

„ **117:** Die grösste Wahrscheinlichkeit ist, dass man die „1" 100-mal wirft und zwar ist dieselbe $= 0{,}044$.

„ **118:** Die Wahrscheinlichkeit ist 1) $= 0{,}05241$
2) $= 0{,}05288$
3) $= 0{,}04160$
4) $= 0{,}00196$
5) $= 0{,}00098$

„ **119:** Die Wahrscheinlichkeit ist $= 1 - \left[\left(\frac{11}{12}\right)^{25} + 25\left(\frac{11}{12}\right)^{24}\left(\frac{1}{12}\right)\right] = 0{,}682$

„ **120:** Bei 219 (220) Würfen ist die Wahrscheinlichkeit kleiner (grösser) als $\frac{1}{2}$.

B. Über das Bernoullische Theorem. Wetten, Versicherungen (Seite 164).

Aufgabe 155: Nach Formel 12 ist $m = 154900$.
„ „ 13 „ $m = 36565$.

„ **156:** Nach 158 Würfen.

„ **157:** Es ist $m = 32$.

„ **158:** Bei 2128400 Geburten.

„ **159:** Es ist $r = 506$.

„ **160:** Man nehme $\gamma = 4$ an, wodurch sich $m = 112000$ ergibt.

„ **161:** Die mathematische Erwartung ist
bei einem Quaterno: $0{,}000001957 \times 19200\,A = 0{,}0375\,A$
„ „ Quinterno: $0{,}00000002275 \times 48000\,A = 0{,}001092\,A$
wenn A der Einsatz ist.

Aufgabe 162: Der Einsatz von A beträgt: $\frac{1}{6}\,G$

Das Risiko ist $= \frac{5}{36}\,G$.

" **163:** Der Einsatz muss $= 0{,}22\;G$ sein.

" **164:** Das Risiko ist $= 1{,}936\;G$.

" **165:** Der Einsatz muss $2\,\frac{4}{27}$ Mark betragen.

" **166:** Das Risiko ist $\frac{253}{589} = 0{,}43$ Mark.

" **167:** Der Einsatz muss $= 1 - \frac{1}{2^{20}-1} = 0{,}9999990463 . = 1$ Mark sein, also von 1 Mark nicht verschieden.

" **168:** Das Risiko ist $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,(2^{20}-1)^2} . = \frac{1}{2}$ Mark.

" **169:** Die Einsätze sind für beide Personen gleich gross.

" **170:** Der Einsatz von A beträgt:

$$2 . \frac{1}{36} + 3 . \frac{2}{36} + 4 . \frac{3}{36} + 5 . \frac{4}{36} + 6 . \frac{5}{36} + 7 . \frac{6}{36} + 8 . \frac{5}{36} + 9 . \frac{4}{36} + $$
$$+ 10 . \frac{5}{36} + 11 . \frac{2}{36} + 12 . \frac{1}{36} = 7 \text{ Mark.}$$

" **171:** Das Risiko von A beträgt:

$$5 . \frac{1}{36} + 4 . \frac{2}{36} + 3 . \frac{3}{36} + 2 . \frac{4}{36} + 1 . \frac{5}{36} = \frac{31}{36} \text{ Mark.}$$

" **172:** A muss 3 Mark zahlen.

" **173:** A erhält $\frac{6}{10} . 12 = 7{,}2$ Mark.

B " $\frac{4}{10} . 12 = 4{,}8$ "

Die Lösung geschieht folgendermassen: Ist p die Wahrscheinlichkeit für A, p_1, die für B einen Pasch zu werfen, $q = 1 - p$, $q_1 = 1 - p_1$, so möge jeder Spieler noch n weitere Würfe machen. Es gewinnt A, im Falle er 4-mal einen Pasch wirft, während B höchstens 5-mal einen Pasch wirft. Hingegen gewinnt B, wenn er in den n Würfen 6-mal einen Pasch wirft, während A höchstens 3-mal einen solchen wirft. Ist also w die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A gewinnt, w_1 die dass B gewinnt, so ist

$$w = \binom{n}{4} p^4 q^{n-4} \left[\binom{n}{5} p_1^5 q_1^{n-5} + \binom{n}{4} p_1^4 q_1^{n-4} + \binom{n}{3} p_1^3 q_1^{n-3} + \binom{n}{2} p_1^2 q_1^{n-2} + \binom{n}{1} p_1 q_1^{n-1} + q_1^n\right]$$

$$w_1 = \binom{n}{6} p_1^6 q_1^{n-6} \left[\binom{n}{3} p^3 q^{n-3} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \binom{n}{1} p\, q^{n-1} + q^n\right],$$

wie leicht ersichtlich nach Formel 8, 4 und 3.

Es ist also

$$\frac{w}{w_1} = \frac{\binom{n}{4} p^4 q^{n-4}}{\binom{n}{6} p_1^6 q_1^{n-6}} . \frac{\left[\binom{n}{5} p_1^5 q_1^{n-5} + \ldots + q_1^n\right]}{\left[\binom{n}{3} p^3 q^{n-3} + \ldots q^n\right]}$$

$$= \frac{\binom{n}{4} p^4 q^{n-4}}{\binom{n}{6} p_1^6 q_1^{n-6}} . \frac{\binom{n}{5} p_1^5 q_1^{n-5}\left[1 + \frac{5}{n-4}\left(\frac{q_1}{p_1}\right) + \frac{4.5}{(n-4)(n-3)}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^2 + \frac{3.4.5}{(n-4)(n-3)(n-2)}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^3 + \frac{2.3.4.5}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^4 + \frac{1.2.3.4.5}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^5\right]}{\binom{n}{3} p^3 q^{n-3}\left[1 + \frac{3}{n-2}\left(\frac{q}{p}\right) + \frac{2.3}{(n-2)(n-1)} . \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{1.2.3}{(n-2)(n-1)n}\left(\frac{q}{p}\right)^3\right]}$$

$$= \frac{6}{4} . \frac{p\,q_1}{p_1\,q} . \frac{n-6}{n-4} . \frac{\left[1 + \frac{5}{n-4}\left(\frac{q_1}{p_1}\right) + \ldots .\right]}{\left[1 + \frac{3}{n-2}\left(\frac{q}{p}\right) + \ldots .\right]}$$

Da nun in unendlich vielen Würfen sicherlich auch für A ein Pasch 4-mal und für B ebenso 6-mal eintritt, so wird für $n = \infty$ das Verhältnis von w und w_1 für die Teilung des Einsatzes maassgebend sein. Für $n = \infty$ wird aber

$$\frac{w}{w_1} = \frac{6}{4} \cdot \frac{p\,p_1}{p_1\,q}$$

und da $p = p_1 = \frac{1}{6}$ $q = q_1 = \frac{5}{6}$ ist, so wird

$$\frac{w}{w_1} = \frac{6}{4}$$

und ... $w + w_1 = 1$,

also $w = \frac{6}{10}$ $w_1 = \frac{4}{10}$

wornach sich die Teilung berechnet.

Allgemein wird, wenn A noch a und B noch b Pasche zu werfen hat:

$$w = \frac{b}{a+b}, \quad w_1 = \frac{a}{a+b}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A resp. B gewinnt.

Aufgabe 174: Der Preis eines Loses ist 30 Mark.

„ **175**: Das Risiko beträgt 23,1 Mark.

„ **176**: Ein Los kostet 46,19 Mark.

„ **177**: Das Risiko ist:

$$= \sum_{o}^{40}\left(46{,}19 - 100\,\rho^{20+i}\right)\frac{9}{10}\cdot\frac{41-i}{60} + \sum_{o}^{22}\left(46{,}19 - 200\,\rho^{38+i}\right)\frac{8}{100}\cdot\frac{23-i}{60}$$

$$= 226{,}94 \text{ Mark}; \quad \rho = \frac{1}{1{,}04}$$

Denn nach 20 Jahren wachsen 46,19 Mark auf mehr als 100 Mark und in 38 Jahren auf mehr als 200 Mark an. In der Aufgabe 141 ist fälschlich statt ρ der Faktor r genommen worden. Das dortige Risiko berechnet sich

$$= \frac{9}{100}\,e \sum_{o}^{9}\left(1-\rho^{i+1}\right)(10-i) = 0{,}54\,e = 116{,}10 \text{ Mark}, \quad \rho = \frac{1}{1{,}03}$$

„ **178**: Das Risiko des Spieles ist 17617600 Mark.

„ **179**: Die Hoffnung des Banquiers ist = 6,82 Mark

„ **180**: „ „ „ „ „ = 33,33 „

„ **181**: „ „ „ „ „ = 20 „

„ **182**: Der Einsatz kann 32,44 Mark betragen, so dass der Gewinn 648,8 Mark ist.

„ **183**: Der Zuschlag kann 10857 Mark zur Nettoprämie von 4750 Mark betragen. Da V im Verhältnis zu v klein ist, so muss man den Zuschlag berechnen nach der Formel $z = V + v\,w - (V + v)^{w} V^{w'}$. Die Gleichung auf Seite 154 hat zu lauten: $P' = v\,w' + V + v\,w - (V + v)^{w'} V^{w'}$, der entsprechend dann die folgenden Gleichungen zu ändern sind.

„ **184**: Der Zuschlag kann 29800 Mark betragen.

„ **185**: Die auf einmal zu zahlende Nettoprämie am Beginn der Versicherung beträgt: 23148,2 Mark.

„ **186**: Das Risiko beträgt 26260,6 Mark.

„ **187**: Das Risiko der Anstalt beträgt 21631 Mark.

„ **188**: Die jährliche Nettoprämie ist = 23,62 Mark.

„ **189**: Die einzuzahlende Summe ist = 1296,9 Mark.

„ **190**: Die jährliche Prämie beträgt 2,44 Mark.

„ **191**: Der Unterschied ist = 0,02 Mark.

„ **192**: Die jährliche Prämie ist = 147,31 Mark.

„ **193**: Die Versicherung dauert 20 Jahre.

III. Teil.

A. Über die Wahrscheinlichkeit einer Ursache (Seite 199).

Aufgabe 211: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{1}{11}$

„ **212**: Aus der ersten Urne.

„ **213**: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{8}{659}$

Aufgabe 214: Die Wahrscheinlichkeit ist = 0, da die Urne keine schwarzen Kugeln enthält.
„ **215**: Es ist am wahrscheinlichsten, dass die Urne 2 weisse und 3 schwarze Kugeln enthält.
„ **216**: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{175}{1971}$
„ **217**: Die Wahrscheinlichkeit ist:

$$= \frac{\dfrac{\binom{15}{12}\binom{5}{4}}{\binom{20}{16}}}{\dfrac{\binom{15}{12}\binom{5}{4}}{\binom{20}{16}} + \dfrac{\binom{16}{12}\binom{20}{4}}{\binom{36}{16}}} = 0{,}9983$$

„ **218**: Die Wahrscheinlichkeit ist = 0,11917.
„ **219**: „ „ „ $= \frac{1}{5}$
„ **220**: „ „ „ $= \frac{36}{55}$
„ **221**: „ „ „ $= \frac{104}{623}$
„ **222**: Am wahrscheinlichsten ist, dass die erste Urne lauter weisse Kugeln enthielt.
„ **223**: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{3072}{11971}$
„ **224**: Die wahrscheinlichste Annahme ist, dass die Urne lauter weisse Kugeln enthielt.
„ **225**: Die Wahrscheinlichkeit ist $= 1 - \frac{1}{\mu}$

$$\log \frac{1}{\mu} = 0{,}49097 - 6; \quad \frac{1}{\mu} = 0{,}000003095$$

„ **226**: Nach Formel 38 ist $\log \mu = 108{,}765$
„ „ 38′ „ $\log \mu = 108{,}719$
„ **227**: „ „ 38 „ $\log \mu = 72{,}264$
„ „ 38′ „ $\log \mu = 72{,}251$
„ **228**: Es ergibt sich $\log \mu = 1{,}63684$; $\frac{1}{\mu} = 0{,}02308$
also ist die Wahrscheinlichkeit $= 1 - \frac{1}{\mu} = 0{,}97692$
„ **229**: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{4}{45}$

B. Über die Wahrscheinlichkeit eines künftigen Ereignisses (Seite 225).

Aufgabe 245: Man muss noch 26 Züge machen.
„ **246**: Die Wahrscheinlichkeit ist = 0,2601
„ **247**: „ „ „ = 0,7268
„ **248**: „ „ „ = 0,992
„ **249**: „ „ „ = 0,93377
„ **250**: „ „ „ = 0,4088
„ **251**: Der Einsatz muss $\frac{8}{11}$ Mark betragen.
„ **252**: Man kann den Einsatz von $\frac{41}{60}$ Mark wagen.
„ **253**: „ „ „ „ „ 2 „ „
„ **254**: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{14101}{21900}$
„ **255**: „ „ „ = 0,634
„ **256**: „ „ „ = 0,837
„ **257**: Der Einsatz kann 0,73 Mark betragen.
„ **258**: *A* erhält $\frac{40}{11}$ Mark, *B* erhält $\frac{15}{11}$ Mark.
„ **259**: Die Wahrscheinlichkeit ist = 0,009749
„ **260**: „ „ „ $= 24728 \cdot 10^{-34}$
„ **261**: „ „ „ $= 3447 \cdot 10^{-17}$

Aufgabe 262: Die Wahrscheinlichkeit ist 1) $= 0{,}00722$
2) $= 8488 \,.\, 10^{-21}$
3) $= 0{,}00002348$
4) $= 1105{,}10^{-60}$

„ **263**: Die grösste Wahrscheinlichkeit ergibt sich dafür, dass 299-mal Wappen und 201-mal Schrift auffällt und zwar ist dieselbe $= 0{,}03067$.

C. Über die wahrscheinlichste Hypothese (Seite 249).

„ **272**: Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist $= 0{,}5155$.
„ **273**: Der wahrscheinliche Fehler ist $= \pm 0{,}00037$
„ **274**: Die Einsätze müssen sich verhalten wie 5319 : 4681, wobei der grössere Einsatz von dem zu leisten ist, der auf Wappen setzt.
„ **275**: Der wahrscheinlichste Wert ist $= 0{,}01296$
Der wahrscheinliche Fehler ist $= 0{,}009965$
„ **276**: Die Wahrscheinlichkeit ist $= \Theta\ (0{,}18) = 0{,}2009357$
„ **277**: „ „ „ $= \Theta\ (1{,}515) = 0{,}9767$
dass die Zahl der Knabengeburten 5080567 ± 11809 ist.
„ **278**: Die Einsätze müssen sich wie 93045 : 6955 verhalten, wobei derjenige, welcher wettet, dass Schrift zwischen 55-mal und 59-mal auffällt, den grösseren Einsatz zu leisten hat.
„ **279**: Es ist $7 < r < 8$ nämlich $r = 7{,}2$. Wettet also A, dass Schrift zwischen 50 und 64-mal auffällt, so ist er im Nachteil, wettet er aber, dass es zwischen 49 und 65-mal auffällt, so ist er im Vorteil, wenn die Einsätze von A und B gleich sind.

D. Aufgaben über Zeugenaussagen (Seite 270).

In den folgenden allgemeinen Lösungen werden die Bezeichnungen des Textes der gelösten Aufgaben beibehalten.

Aufgabe 289: $W = \dfrac{p\,p_1}{p\,p_1 + p'\,p'_1\,(n-1)} \quad \begin{pmatrix} p + p' = 1 \\ p_1 + p'_1 = 1 \end{pmatrix}$

„ **290**: $W = \dfrac{p\,p'_1}{p\,p_1 + p'\,p'_1\,(n-1)}$

„ **291**: $W = \dfrac{r\,r'_1}{r\,r'_1 + r_1\,r'\,(n-1)}$

„ **292**: $W = \dfrac{q\,q'_1}{q\,q'_1 + q'\,q_1\,(n-1)} \quad \begin{pmatrix} q = p\,r + p'\,r' \\ q' = p\,r' + p'\,r \end{pmatrix}$

„ **293**: $W = \dfrac{m\,q}{m\,q + n\,q'}$

„ **294**: $W = \dfrac{\dfrac{p\,p'_1}{n\,(n-1)}}{\dfrac{p\,p'_1}{n\,(n-1)} + \dfrac{p'\,p_1}{n\,(n-1)} + \dfrac{(n-2)\,p'\,p'_1}{n\,(n-1)^2}} = \dfrac{p\,p'_1\,(n-1)}{p' + p'_1 + n\,(1 - p\,p_1)}$

„ **295**: $W = \dfrac{\dfrac{r\,r'_1}{n\,(n-1)}}{\dfrac{r\,r'_1}{n\,(n-1)} + \dfrac{r'\,r_1}{n\,(n-1)} + \dfrac{(n-2)\,r'\,r'_1}{n\,(n-1)^2}} = \dfrac{r\,r'_1\,(n-1)}{r' + r'_1 + n\,(1 - r\,r_1}$

„ **296**: $W = \dfrac{1}{1 + 1063 \,.\, 10^{-12}}$

„ **297**: $W = \dfrac{1}{1 + 2918 \,.\, 10^{-8}}$

„ **298**: $W = \dfrac{q^m\,q'^n}{q^m\,q'^n + (k-1)\,q'^m\,q^n}$

„ **299**: $W = \dfrac{1}{1 + 8942 \,.\, 10^{-18}}$

„ **300**: $W = 0{,}9989386$
„ **301**: Der Vorgang der Aufgabe 299 ist entschieden der empfehlenswertere.
„ **302**: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Richter irrt, ist $= 0{,}0433$, da er nicht irrt $= 0{,}9567$
„ **303**: Zur Majorität sind 5 (4,68) Stimmen erforderlich.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von **Dr. Ad. Kleyer**“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

